

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 18 mars 2026 kl 8–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 50 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 24 poäng

4: lägst 34 poäng

5: lägst 44 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematisk tabellsamling (TEFYMA eller motsvarande), institutionens formelsamling i reglerteknik, samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet rapporteras via Ladok. Facit kommer vara tillgängligt via Canvas. Även tid och plats för tentavisning meddelas via Canvas.

1. Skriv om systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0] x\end{aligned}$$

a. som överföringsfunktion (från U till Y) (2 p)

b. som differentialekvation (på formen $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_1\dot{u} + b_0u$) (2 p)

c. Bestäm systemets poler och nollställen (2 p)

Solution

a. Laplacetransform ger $Y = X_1$, $sX_1 = X_2$, $sX_2 = -2X_2 + U \Rightarrow$

$$Y = X_1 = \frac{1}{s} X_2 = \frac{1}{s(s+2)} U.$$

Kan också beräknas genom $C(sI - A)^{-1}B$.

b. Från a) erhålles $s(s+2)Y = U$ vilket efter invers-Laplace ger

$$\ddot{y} + 2\dot{y} = u.$$

c. Poler $s=0$ och $s=-2$; nollställen saknas.

2. Figur 1 visar insignalen $u = \sin(\omega t)$ och utsignalen $y(t)$ till ett linjärt system.

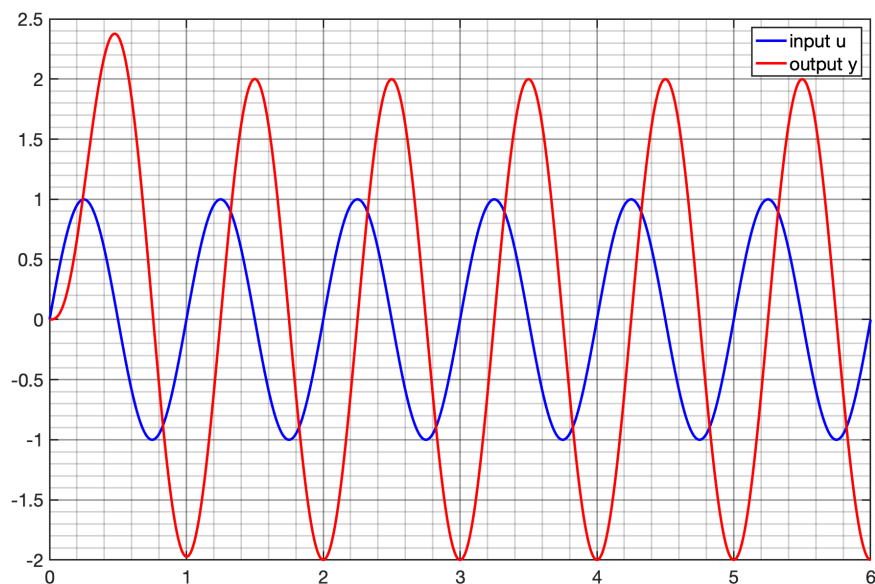


Figure 1 Insignal och utsignal i uppgift 2

- a.** Efter transienter klingat av ges utsignalen av $y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$.
Bestäm A, ω och ϕ . (2 p)
- b.** Det är känt att systemets överföringsfunktion har formen

$$G(s) = \frac{b}{(s + a)^2}.$$

Bestäm parametrarna a och b . (2 p)

Solution

- a.** Från figuren ser vi att $A = 2$ och att periodtiden är 1, dvs $\omega = 2\pi$. Eftersom utsignalen ligger en kvarts period (90 grader) efter insignalen är $\phi = -\pi/2$.
- b.** Ekvationen $\arg G(i\omega) = \phi$, dvs $\arg G(i2\pi) = -\frac{\pi}{2}$, ger

$$\arg G(i2\pi) = \arg \frac{b}{(i2\pi + a)^2} = -2 \arctan(2\pi/a) = -\frac{\pi}{2}$$

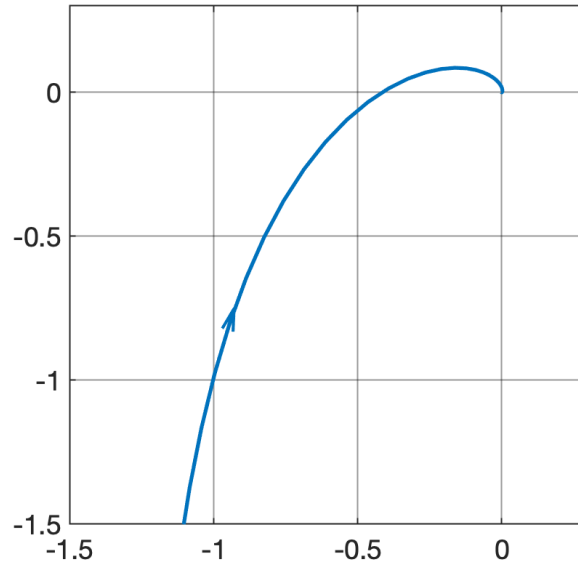
vilket ger $a = 2\pi \approx 6.3$.

Vidare så får vi för amplituden att

$$2 = |G(i\omega)| = \frac{b}{\omega^2 + a^2} = \frac{b}{8\pi^2}$$

vilket ger $b = 16\pi^2 \approx 158$

3. I figur 2 visas nyquistdiagrammet (ritat för endast positiva frekvenser) för ett system. Systemet saknar poler och nollställen i höger halvplan. Bestäm om vart och ett av följande påståenden är sant, falskt eller om det saknas tillräckligt med information för att avgöra. Motivera! (6 p)



Figur 2 Nyquistdiagram i fråga 3. (Imaginärdelen går mot $-\infty$ när ω går mot 0.)

- Systemet innehåller en integrator.
- Amplitudmarginalen är större än 2 vid enkel återkoppling.
- Systemet har ordning 2.
- Om systemet återkopplas med en proportionell regulator med förstärkning 2 så blir det slutna systemet stabilt.
- Fasmarginalen är större än 50° .
- Dödtidsmarginalen är större än 1 sekund.

Solution

- Sant. Amplituden börjar i oändligheten och måste därför ha en pol i 0, dvs en integrator $\frac{1}{s}$.
- Sant. Förstärkningen vid -180° är ungefär 0.4 dvs amplitudmarginalen är $\frac{1}{0.4} > 2$.
- Falskt. Fasen i systemet går mot minst -270° så det innehåller minst tre poler (systemet kan även innehålla en tidsfördröjning vilket dock skulle ge oändlig systemordning).
- Sant. Detta följer av deluppgift b.
- Falskt. Systemet har cirka 35° fasmarginal.

- f. Saknas information. $L_m = \varphi_{\text{pm}}/\omega_c$ men ω_c går inte att avläsa från ett Nyquist-diagram.
4. Inför årets Celestialkarneval har försök gjorts att bygga en rymdraket. Dynamiken för en komponent i denna beskrivs av ekvationerna

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 1 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= -x_2 - 2x_3 \\ y &= x_3^2\end{aligned}$$

- a. Finn systemets stationära punkt då $u = 0$. (2 p)
- b. Linjärisera systemet runt den stationära punkten. (4 p)
- c. Är det linjäriserade systemet asymptotiskt stabilt? (2 p)

Solution

- a. Genom att sätta derivatorna och u till noll, fås ekvationssystemet

$$\begin{aligned}0 &= -x_1 + 1 \\ 0 &= x_1^2 - x_2 \\ 0 &= -x_2 - 2x_3\end{aligned}$$

Direkt fås att den stationära punkten är $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, u_0^0, y_0^0) = (1, 1, -1/2, 0, 1/4)$. ■

- b. Med

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, x_3, u) &= -x_1 + 1 + u \\ f_2(x_1, x_2, x_3, u) &= x_1^2 - x_2 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, u) &= -x_2 - 2x_3 \\ g(x_1, x_2, x_3, u) &= x_3^2\end{aligned}$$

blir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= -1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0 & \frac{\partial f_1}{\partial u} &= 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= 2x_1 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= -1 & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= 0 & \frac{\partial f_2}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} &= 0 & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} &= -1 & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} &= -2 & \frac{\partial f_3}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} &= \frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial g}{\partial u} = 0 & \frac{\partial g}{\partial x_3} &= 2x_3\end{aligned}$$

Låt Δx , Δu respektive Δy beteckna avvikelsen ifrån den stationära punkten. Då blir det linjäriserade systemet runt den stationära punkten

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}}^A \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix}.$$

- c. Eftersom A-matrisen är undertriangulär ges egenvärdena av diagonalelementen. Eftersom alla dessa är negativa så är systemet asymptotiskt stabilt.

5. Ett system kan beskrivas på tillståndsformen nedan.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

- a. Är systemet styrbart? Om inte, vilka är de styrbara tillstånden? (2 p)
- b. Är systemet observerbart? Om inte, vilka är de icke-observerbara tillstånden? (2 p)

Solution

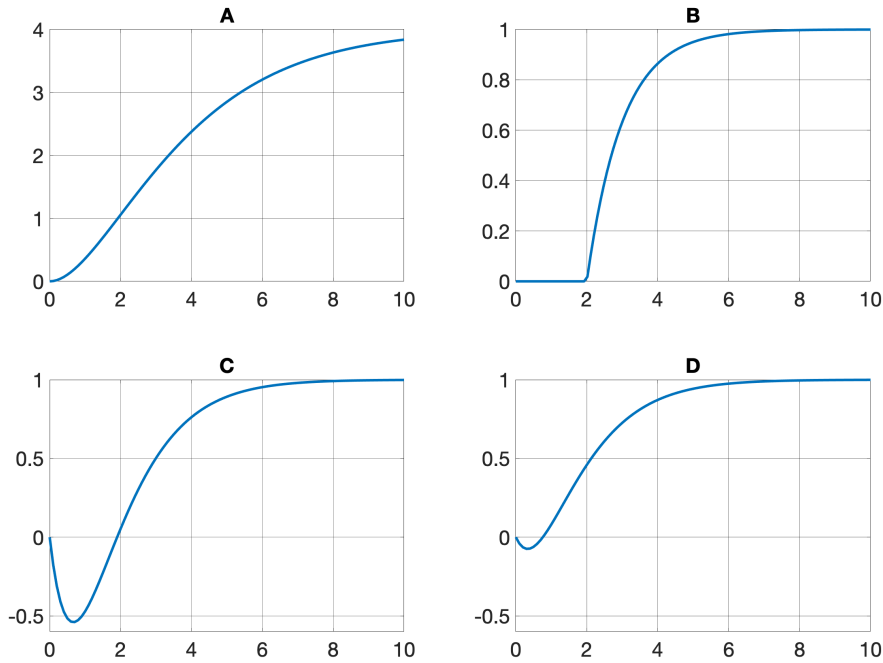
- a. $W_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ har full rang så systemet är styrbart.
- b. $W_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ har inte full rang så systemet är inte observerbart. De tysta tillstånden ges av $W_o x = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$. De kan alltså skrivas på formen $x = [k \ 0]^T$ för reella k .
6. Para ihop stegsvaren A till D i figur 4 med överföringsfunktionerna G_1 till G_5 (en blir över). Glöm inte motivera svaret. (4 p)

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{1}{(s+0.5)^2}, & G_2(s) &= \frac{1-2s}{(s+1)^2}, & G_3(s) &= \frac{e^{-2s}}{s+1} \\ G_4(s) &= \frac{1-0.5s}{(s+1)^2}, & G_5(s) &= \frac{1}{5s+1} \end{aligned}$$

Solution

System G_1 har stationär förstärkning $G_1(0) = 4$ vilket svarar mot figur A. (De andra systemen har alla stationär förstärkning 1.)

System G_3 innehåller 2 sekunders tidsfördröjning, vilket svarar mot figur B.



Figur 3 Stegsvär i uppgift 6.

System G_2 och G_4 innehåller båda ett nollställe i HHPL, de svarar därför mot C och D. För att avgöra vilken som är vilken kan vi använda begynnelsevärdes-satsen som ger att begynnelsederivatan är $\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 G(s) \frac{1}{s}$. Detta ger värdet $\dot{y}_2(0) = -2$ (stämmer med figur C) och $\dot{y}_4(0) = -0.5$ (stämmer med figur D).

G_5 är ett första ordningens system med tidskonstant 5 och stationär förstärkning 1. En sån figur saknas.

Svar: 1,2,3,4,5 = A,C,B,D,X

7. Betrakta systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= [1 \quad 0] x.\end{aligned}$$

Designa en tillståndsåterkoppling $u = -Kx + k_r r$ så att slutna systemets poler hamnar i -1 . Stationär förstärkning från r till y ska vara 1. (6 p)

Solution

Styrlagen $u = k_r r - Kx$, ger följande tillståndsekvation

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x + Bk_r r \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Polerna för denna ges av

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BK) &= \left| \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (k_1 \quad k_2) \right| \\ &= \begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ -2+k_1 & s+k_2 \end{vmatrix} \\ &= s^2 + s(k_2 - 1) + k_1 - k_2 - 2 \end{aligned}$$

Identifiering av koefficienter med designpolynomet $(s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$ ger

$$\begin{cases} k_2 - 1 = 2, \\ k_1 - k_2 - 2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k_2 = 3, \\ k_1 = 6. \end{cases}$$

Den statiska förstärkningen från r till y ges av

$$\begin{aligned} G(0) &= C(-A + BK)^{-1} B k_r = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} k_r \\ &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} k_r = k_r. \end{aligned}$$

Alltså får $k_r = 1$ och $K = [6 \ 3]$

8. Kretsöverföringsfunktionen för en process är

$$G_o(s) = \frac{3}{s(s+1)(s+2)}$$

När systemet återkopplas enkelt blir dess stegsvar alldeles för svängigt.

- Skissa Bode-diagrammet för G_o . (2 p)
- Bestäm skärfrekvens ω_c och fasmarginal ϕ_m för G_o (2 p)
- Designa en lämplig kompenseringslänk sådan att det kompenserade systemets nya fasmarginal blir 60° , samtidigt som snabbheten bevaras. (4 p)

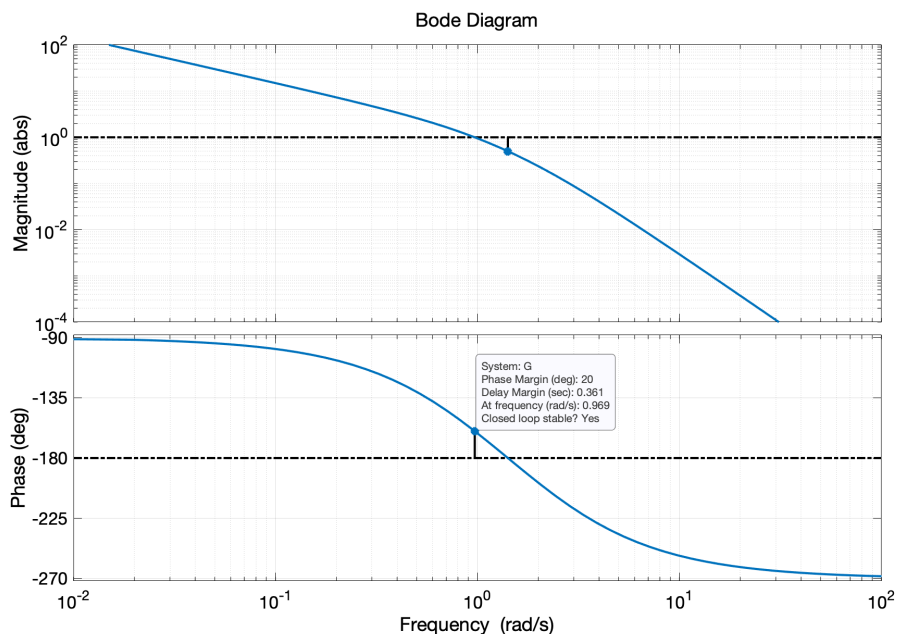
Solution

- Bodediagrammet har en asymptot vid låga frekvenser som ges av $G \approx 1.5/s$, dvs lutning -1 och fas -90 grader. Lutningen ändras till -2 vid $\omega = 1$ och till -3 vid $\omega = 2$. Fasen går mot -270 grader vid höga frekvenser.
- Vi börjar med att bestämma skärfrekvensen. Detta kan antingen göras från en noggrannt ritad figur eller (bättre) genom att numeriskt hitta ω som löser

$$|G_o(i\omega)| = \frac{3}{|\omega|\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}} = 1.$$

dvs

$$|\omega|\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2} = 3$$



Figur 4 Bode plot.

För $\omega = 1$ fås ett vänsterled som är $\sqrt{10}$ vilket är lite större än 3. Genom att testa lite lägre ω (vi vet amplitudkurvan är avtagande) fås det noggrannare värdet $\omega_c \approx 0.97$.

Fasmarginalen blir för $\omega_c \approx 0.97$

$$\begin{aligned}\phi_m &= \pi + \arg(G_0(i\omega_c)) \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega_c) - \arctan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \approx 0.35 \text{ rad} \approx 20^\circ.\end{aligned}$$

- c. Vi vill höja fasen och använder därför en fasavancerande länk. Det behövs ett fastillskott $\Delta\phi_m = 40^\circ$. Avläsning i diagram ger $N \approx 4.6$. Vidare så är

$$b = \frac{\omega_c}{\sqrt{N}} \approx 0.45$$

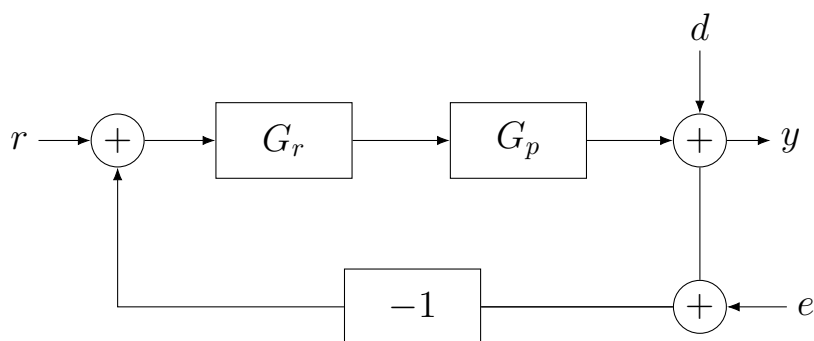
och

$$K_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \approx 0.47.$$

Således blir kompenseringslänken

$$G_K(s) = K_k N \frac{s+b}{s+bN} = 2.2 \cdot \frac{s+0.45}{s+2.1}.$$

9. Figur 5 visar en enkel reglerkrets, med regulator G_r och process G_p , som har problem med både utsignalstörning d och mätbrus e . I uppgiften är $r = 0$.
- a. Bestäm överföringsfunktionen G_{yd} från d till y och överföringsfunktionen G_{ye} från e till y (svaren ska anges för generella G_r och G_p). (2 p)



Figur 5 Block diagram.

- b. Din kollega har fått i uppgift att designa en regulator G_r som är bra på att hantera både laststörningar och mätbrus samtidigt. Designkraven denna har fått är att åstadkomma att både

$$|G_{yd}(i\omega)| < 0.2 \quad \text{för } \omega < 15 \text{ rad/s}$$

och

$$|G_{ye}(i\omega)| < 0.5 \quad \text{för } \omega > 10 \text{ rad/s.}$$

■

Kollegan har försökt designa en PID regulator som uppfyller dessa krav men har misslyckats och ber nu dig om hjälp. Vad kan du ge för råd ? (2 p)

Solution

a. $G_{yd} = \frac{1}{1+G_p G_r}$ och $G_{ye} = \frac{-G_p G_r}{1+G_p G_r}$.

- b. En enkel räkning ger att

$$G_{yd} - G_{ye} = 1.$$

vilket förklarar varför det är svårt att göra $|G_{yd}|$ och $|G_{ye}|$ små samtidigt: Om kraven $|G_{yd}(i\omega)| < 0.2$ och $|G_{ye}(i\omega)| < 0.5$ båda ska vara uppfyllda för $\omega \in (10, 15)$ så skulle detta, för dessa frekvenser, innebära att

$$1 = |G_{yd}(i\omega) - G_{ye}(i\omega)| \leq |G_{yd}(i\omega)| + |G_{ye}(i\omega)| < 0.2 + 0.5 = 0.7$$

dvs $1 < 0.7$ vilket inte är möjligt.

Din kollega bör därför gå tillbaka till personen som satt kraven och förklara att dessa är omöjliga att uppfylla.

Kanske kan processen omdesignas, eller så kan något av kraven tas bort eller göras mindre strikta om man till exempel inför framkoppling av d , eller om man skaffar en bättre mätgivare som har mindre mätbrus.