

Reglerteknik AK

Tentamen 27 oktober 2025, kl 14–19

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 50 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift. Alla svar skall vara tydligt motiverade.

Betyg 3: lägst 24 poäng
4: lägst 34 poäng
5: lägst 44 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via Ladok och tid för visning via announcement på kursens Canvas-sida.

1. Betrakta överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{s+3}.$$

- a. Ange systemets poler och nollställen. (2 p)

- b. Ange systemets statiska förstärkning. (2 p)

Solution

- a.

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Poler: -1,-2,-3; Nollställen: $-2 \pm i$.

- b. Statisk förstärkning $G(0) = \frac{5}{6}$

2. Ett system beskrivs av modellen

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{x(t)} + (u(t))^2$$

$$y = \sqrt{x(t)}.$$

- a. Linjärisera modellen kring den stationärpunkt som motsvarar $u^0 = 1$. (4 p)

- b. Bestäm motsvarande överföringsfunktion för det linjäriserade systemet och avgör huruvida det linjäriserade systemet är asymptotiskt stabilt. (2 p)

Solution

- a. Vid stationäritet gäller att

$$\dot{x} = -\frac{1}{x^0} + (u^0)^2 = 0.$$

Detta ger stationärt $u^0 = 1$, $x^0 = 1$, $y^0 = 1$. Sätt nu

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{x(t)} + u^2(t) = f(x, u),$$

$$y = \sqrt{x(t)} = g(x, u).$$

Nu beräknar vi de partiella derivatorna m a p x och u :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2u,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 0.$$

Det linjäriserade systemets ekvationer blir

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^0 \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^0 \Delta u \\ &= \Delta x + 2\Delta u \\ \Delta y &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^0 \Delta x + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^0 \Delta u \\ &= \frac{1}{2} \Delta x\end{aligned}$$

Där $\Delta x = x - x^0$, $\Delta u = u - u^0$ och $\Delta y = y - y^0$.

- b.** Överföringsfunktionen från Δu till Δy blir, efter Laplace transformering:

$$s\Delta X = \Delta X + 2\Delta U \iff \Delta X = \frac{2}{s-1}\Delta U,$$

$$\Delta Y = \frac{1}{2}\Delta X = \frac{1}{s-1}\Delta U.$$

Det linjäriserade systemet har alltså en pol i 1, varför det linjäriserade systemet är instabilt.

- 3.** Följande differentialekvation beskriver ett dynamiskt system

$$\ddot{y} + 8\dot{y} + 15y = \dot{u}, \quad t \geq 0.$$

- a.** Bestäm systemets överföringsfunktion, $G : U(s) \rightarrow Y(s)$. (2 p)

- b.** Bestäm systemets stegsvar, d.v.s. bestäm $y(t)$ då insignalen ges av (4 p)

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Solution

- a.** Laplace-transformering ger $(s^2 + 8s + 15)Y(s) = sU(s)$, alltså fås

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 8s + 15}.$$

- b.** Med $U(s) = \frac{1}{s}$ fås

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2 + 8s + 15} = \frac{1}{(s+3)(s+5)}$$

Rad 16 i formelsamlingen (eller partialbråksuppdelning) ger nu

$$y(t) = 0.5(e^{-3t} - e^{-5t}).$$

- 4.** En regulator ska designas för en okänd process. Genom att återkoppla systemet med en proportionell regulator med $K = 8$ fås ett system som ligger på stabilitetsgränsen och har stegsvaret i Figur 1 (där två punkter märkts ut). Använd Ziegler–Nichols frekvensmetod för att designa en PID-regulator. (4 p)

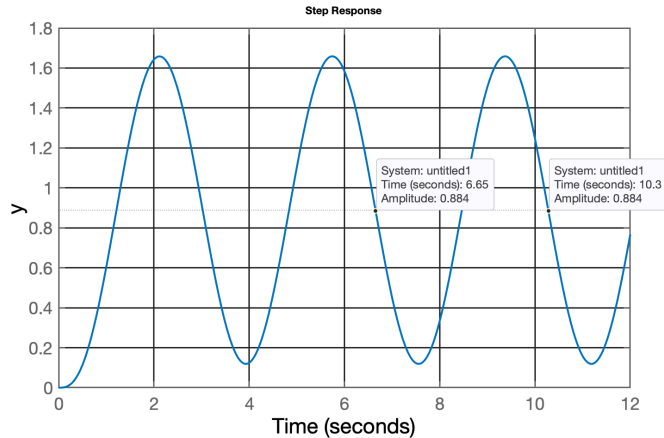


Figure 1 Stegsvär för återkopplat system med $K = 8$ (Ziegler–Nichols-metoden).

Solution Från figuren avläser vi självsvängningsperioden till $T_0 = 10.3 - 6.65 \approx 3.6$. Från tabell i formelsamlingen får vi följande regulatorparametrar $K = 0.6K_0 = 4.8$, $T_i = T_0/2 \approx 1.8$ och $T_d = T_0/8 \approx 0.45$

5. Figur 2 visar fyra Nyquistdiagram A–D. Nedan finns sex överföringsfunktioner, $G_1(s)$ – $G_6(s)$. Ange vilken överföringsfunktion som hör ihop med respektive Nyquistdiagram. Motivering krävs. (4 p)

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{1}{s+1}, & G_2(s) &= \frac{18}{(s+3)^2}, \\ G_3(s) &= \frac{4}{(s+2)^2}, & G_4(s) &= \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2}, \\ G_5(s) &= \frac{1}{s(s+1)}, & G_6(s) &= \frac{1}{(s+1)^3}. \end{aligned}$$

Solution Genom att studera överföringsfunktionernas förstärkning och fas för $s = 0$ och för $s \rightarrow \infty$ kan vi resonera så här (andra lösningsmetoder är möjliga):

$G_2=C$: Alla överföringsfunktionerna har stationär förstärkning 1 utom G_2 som har $G_2(0) = 2$ och därför måste höras till C.

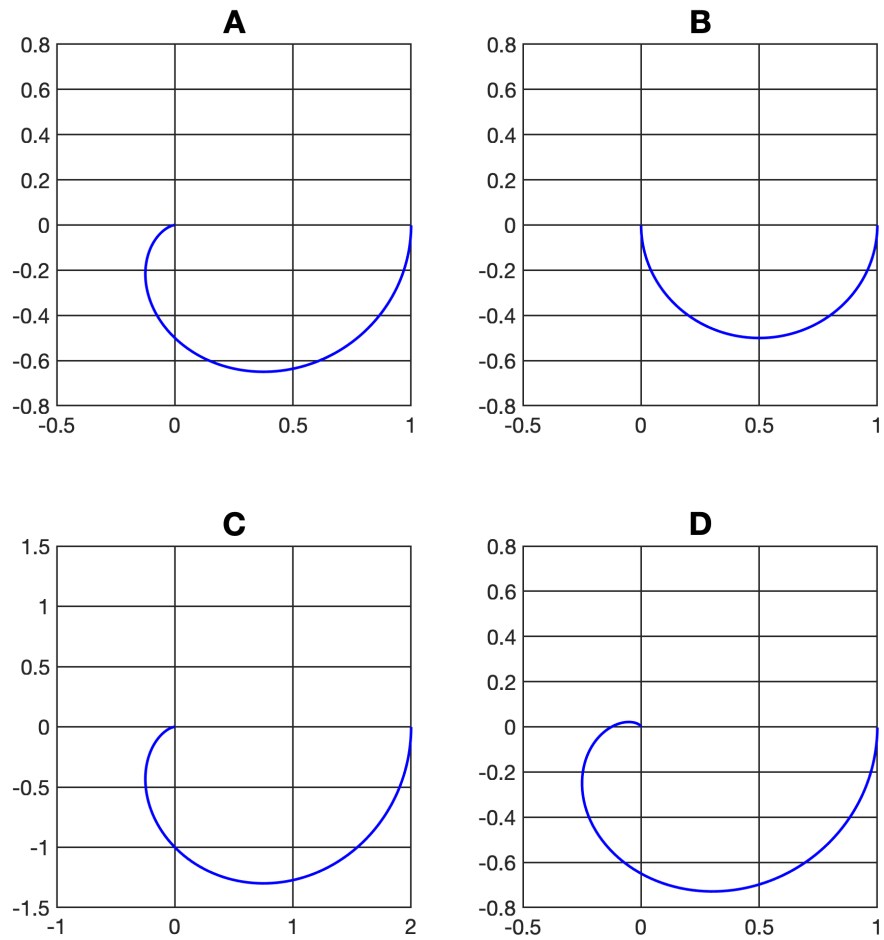
$G_1=B$: Det är bara överföringsfunktion G_1 som har en Nyquistkurva som håller sig i fjärde kvadranten; alla de övriga har en fas som sjunker under -90 grader för höga frekvenser.

G_5 har en integrator, och skulle svara mot en Nyquistkurva som börjar ute i oändligheten, med fas -90 grader. Den kan vi därför stryka.

$G_3=A$: Nyquistkurva A har fas -180 grader för höga frekvenser och stationär förstärkning 1. Det är bara G_3 som har dessa egenskaper

$G_6=D$: Figur D ser ut att ha fas -270 grader för höga frekvenser. Det kan inte vara kurva G_4 som har en tidsfördröjning och borde haft en spiralliknande Nyquistkurva nära origo. Figur D måste därför höras ihop med G_6 .

Skulle man vara noggrann och säkert skilja G_4 och G_6 åt (det skulle ju kunna vara så att tidsfördröjningen är så liten att den så typiska spiralen inte syns



Figur 2 Nyquistdiagram A–D

i figuren) så kan man beräkna fas och amplitud för tex punkten $s = i$, dvs beräkna $G_4(i)$ och $G_6(i)$. Men en sån uträkning behövs inte för full poäng.

Svar: A=3, B=1, C=2, D=6

6.

a. Ett system har tillståndsformen

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

För vilka värden på b_1 och b_2 är systemet ovan styrbart? (2 p)

b. För vilka värden på c_1 och c_2 är systemet nedan observerbart? (2 p)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x$$

c. Betrakta systemet i deluppgift b) där $c_1 = 1$ och $c_2 = 0$. Beräkna en tillståndsåterkoppling

$$u = -Kx + k_r r$$

så att det slutna systemets karakteristiska polynom blir $s^2 + 2s + 3$ och dess statiska förstärkning, från r till y , är lika med 1. (6 p)

Solution

a. Vi får styrbarhetsmatris

$$W_s = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & 2b_2 \end{bmatrix}.$$

För att systemet ska vara styrbart ska determinanten vara skild från noll, dvs $\det W_s = b_1 b_2 \neq 0$

Svar: Både b_1 och b_2 måste vara skilda från noll.

b. Vi får observerbarhetsmatris

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 & c_1 + 2c_2 \end{bmatrix}$$

Denna matris har determinant $\det W_o = c_1(c_1 + 2c_2) - c_1 c_2 = c_1(c_1 + c_2)$

Svar: Systemet är observerbart om $c_1 \neq 0$ och $c_1 + c_2 \neq 0$.

c. Det slutna systemets karakteristiska ekvation blir

$$\det(sI - A + BK) = \det \begin{pmatrix} s-1 & -1 \\ k_1 & s-2+k_2 \end{pmatrix} = s^2 + (k_2 - 3)s + 2 + k_1 - k_2.$$

Vi vill välja k_1 och k_2 så att vi får den karakteristiska ekvationen $s^2 + 2s + 3$.

Identifiering av koefficienter ger att $k_1 = 6$ och $k_2 = 5$.

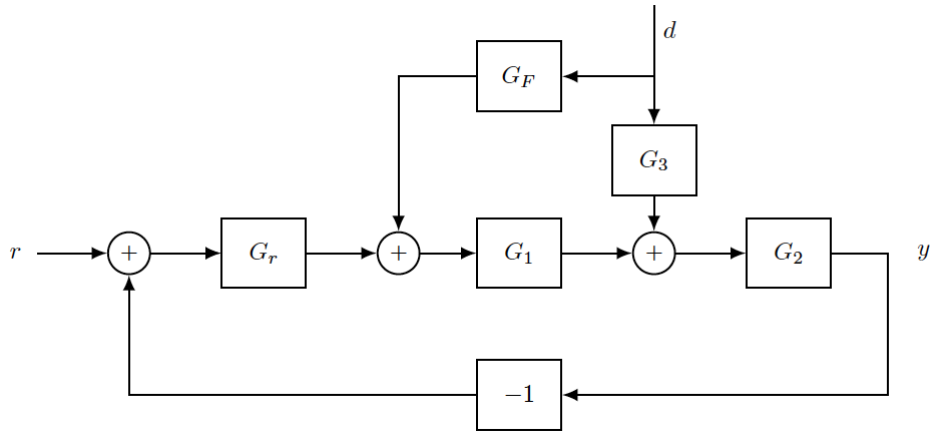
Det återkopplade systemets överföringsfunktion ges av

$$G(s) = C(sI - A + BK)^{-1} B k_r.$$

Den statiska förstärkningen blir då

$$G(0) = C(-A + BK)^{-1} B k_r = \dots = \frac{k_r}{3}.$$

Denna ska vara 1, d v s $k_r = 3$.



Figur 3 Blockdiagram för uppgift 7.

7. Betrakta systemet i Figur 3.

- a. Bestäm G_{yr} och G_{yd} , d.v.s. överföringsfunktionerna från r till y respektive från d till y , uttryckta i G_r , G_1 , G_2 , G_3 och G_F . (4 p)

b. Antag att

$$G_r(s) = \frac{2s+1}{s}, \quad G_1(s) = \frac{2}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{s}{(s+2)(s+3)}, \quad G_3(s) = \frac{1}{s+3}.$$

Bestäm framkopplingen G_F så att d inte har någon inverkan på utsignalen y . (2 p)

Solution

a.

$$Y = G_2(G_3D + G_1(G_FD + G_r(R - Y)))$$

$$Y = \underbrace{\frac{G_2(G_3 + G_1G_F)}{1 + G_2G_1G_r}}_{G_{yd}} D + \underbrace{\frac{G_2G_1G_r}{1 + G_2G_1G_r}}_{G_{yr}} R$$

- b. d har ingen inverkan på utsignal y om $G_{yd}(s) \equiv 0$, dvs $G_3 + G_1G_F \equiv 0$, dvs då

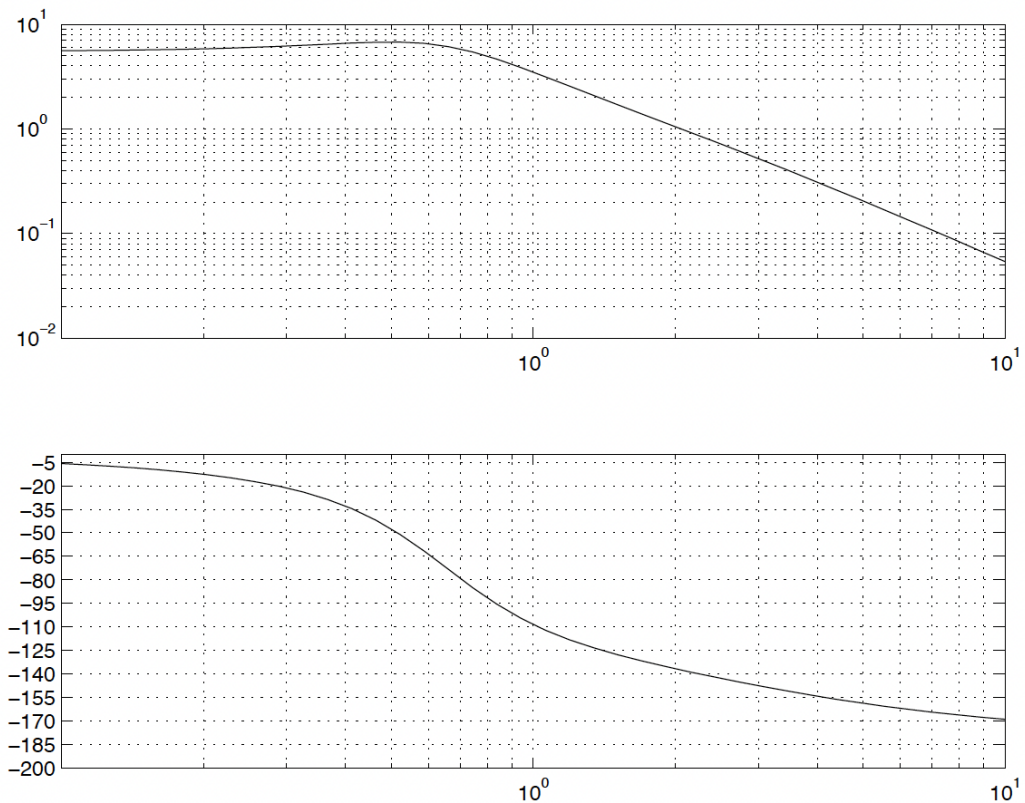
$$G_F(s) = -G_3(s)G_1^{-1}(s) = -\frac{s+1}{2(s+3)}.$$

(Detta är en implementerbar, stabil, överföringsfunktion och behöver därför inte approximeras.)

8.

- a. Förklara hur problem med windup (integratoruppvridning) kan uppstå. (2 p)
- b. Beskriv hur problemet kan undvikas, alltså hur *antiwindup* kan implementeras. En beskrivning i ord räcker. (2 p)

Solution Se kompendiet



Figur 4 Figur 4: Bodediagram för $G_o(s)$.

9. I Figur 4 visas Bodediagrammet för en kretsöverföringsfunktion $G_o(s)$. Motsvarande slutna system är för långsamt. Dimensionera en fasavancerande kompensering

$$G_K(s) = K_k N \frac{s + b}{s + bN}$$

så att det återkopplade kompenserade systemet blir ungefär dubbelt så snabbt utan att fasmarginalen påverkas. (6 p)

Solution Den gamla skärfrekvensen $\omega_c = 2$ läses av ur Bodediagrammet. Eftersom vi vill göra systemet dubbelt så snabbt ska den nya skärfrekvensen vara $\omega_c^{ny} = 4$. Vid den nya skärfrekvensen är fasen till G_0 cirka -155 grader, jämfört med cirka -135 grader vid den gamla skärfrekvensen. Vi behöver därför höja fasen 20 grader vid $\omega = 4$ för att bibehålla samma fasmarginal. Detta ger $N = 2$ enligt diagrammet i formelsamlingen.

Vi kan nu bestämma b från villkoret $b\sqrt{N} = \omega_c^{ny}$ (som kommer från villkoret att filtret ska ge mest fasavancering vid den nya skärfrekvensen). Detta ger $b = 4/\sqrt{2} \approx 2.8$.

Till sist ser vi till att filtret ger rätt förstärkning vid den nya skärfrekvensen, där amplituden av det kompenserade systemet ska bli 1, dvs

$$1 = |G_o(i4)G_K(i4)| = 0.3 \cdot K_k \sqrt{N}$$

vilket ger $K_k = 1/(0.3\sqrt{2}) \approx 2.4$.

Svar: $G_K(s) = 4.8 \frac{s+2.8}{s+5.6}$