

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 20 augusti 2025 kl 8–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 50 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 24 poäng

4: lägst 34 poäng

5: lägst 44 poäng

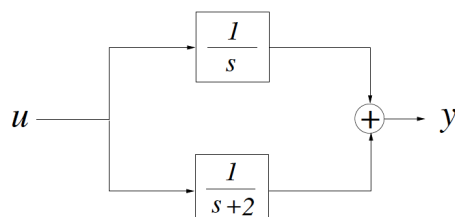
Tillåtna hjälpmedel

Matematisk tabellsamling (TEFYMA eller motsvarande), institutionens formelsamling i reglerteknik, samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet rapporteras via Ladok. Facit kommer vara tillgängligt via Canvas. Tid och plats för tentavisning meddelas via mail.

1. Betrakta blockdiagrammet i figuren. Låt överföringsfunktionen från u till y vara $G(s)$.



- a. Ange $G(s)$ och bestäm systemets poler och nollställen. (4 p)
- b. Ge en tillståndsbeskrivning ($\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$) för systemet. (4 p)

Solution

- a. $G(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+2}{s(s+2)}$. Polerna är $s = 0$ och $s = -2$. Systemet har ett nollställe vid $s = -1$.
- b. Låt utsignalen från de två blocken vara x_1 och x_2 . Vi har $\dot{x}_1 = u$ och $\dot{x}_2 = -2x_2 + u$ och $y = x_1 + x_2$, vilket ger tillståndsbeskrivningen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1] x\end{aligned}$$

Många andra lösningar finns. Till exempel kan någon av standard-formerna från formelsamlingen användas.

2. Ett system beskrivs av

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^4 + ax_1^2 + a \cos u\end{aligned}$$

där u är insignal och a är en reell konstant.

- a. Linjärisera systemet kring den stationära punkten $(x_1^o, x_2^o, u^o) = (1, 0, \pi)$. (4 p)
- b. För vilka a är det linjäriserade systemet asymptotiskt stabilt? (2 p)

Solution

- a. Linjärisering sker enligt de fyra stegen i föreläsningssanteckningarna med $f_1(x, u) = x_2$ och $f_2(x, u) = -x_2^4 + ax_1^2 + a \cos u$

1. Ta fram stationär punkt. Denna del är redan given i uppgiften. Med beteckningar enligt **a** gäller $(x_1^o, x_2^o, u^o) = (1, 0, \pi)$.

2. Taylorserieutveckla $f_i(x, u)$ runt stationär punkt.

$$\begin{aligned}f_1(x, u) &\approx f_1(x^o, u^o) + \frac{\partial}{\partial x} f_1(x^o, u^o)(x - x^o) + \frac{\partial}{\partial u} f_1(x^o, u^o)(u - u^o) \\&= x_2 - x_2^o \\f_2(x, u) &\approx f_2(x^o, u^o) + \frac{\partial}{\partial x} f_2(x^o, u^o)(x - x^o) + \frac{\partial}{\partial u} f_2(x^o, u^o)(u - u^o) \\&= 0 + 2a \cdot 1 \cdot (x_1 - x_1^o) - 4 \cdot 0^3 \cdot (x_2 - x_2^o) - a \sin(\pi) \cdot (u - u^o) \\&= 2a(x_1 - x_1^o)\end{aligned}$$

3. Introducera variablerna

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= x_1 - x_1^o \\ \Delta x_2 &= x_2 - x_2^o\end{aligned}$$

4. Tillståndsekvationerna i de nya variablerna blir nu

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= 2a\Delta x_1\end{aligned}$$

vilket i matrisform är

$$\Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2a & 0 \end{bmatrix} \Delta x$$

b. Polerna, dvs egenvärdena till systemet, fås ur

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -2a & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2a = 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{2a}$$

Om $a > 0$ så finns det en pol i högra halvplanet, vilket gör systemet instabilt. Om $a \leq 0$, så är polerna rent imaginära. Slutsatsen är att det linjäriserade systemet aldrig är asymptotiskt stabilt.

3. Betrakta systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1] x\end{aligned}$$

a. Är systemet styrbart? (2 p)

b. Bestäm en tillståndsåterkoppling $u = -Kx + k_r r$ så att det slutna systemet får följande karakteristiska ekvation: (3 p)

$$s^2 + 4s + 4 = 0$$

Du behöver inte bestämma konstanten k_r .

- c. Vilken egenskap ska systemet ha för att man ska kunna skatta hela tillståndsvektorn x givet mätningar av u och y ? Har systemet den egenskapen ? (2 p)
- d. Vad brukar man göra om man inte kan mäta alla tillstånden ? (1 p)

Solution

- a. Styrbarhetsmatrisen är

$$W_s = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolonnerna är linjärt oberoende, vilket innebär att systemet är styrbart.

- b. Med $u = -[k_1 \ k_2]x$ blir det karakteristiska polynomet

$$s^2 + (3 + k_1 + 2k_2)s + 2 + k_1 + 6k_2$$

Identifiera koefficienterna med

$$s^2 + 4s + 4$$

Detta ger

$$\begin{aligned} 3 + k_1 + 2k_2 = 4 & \Rightarrow k_1 + 2k_2 = 1 \\ 2 + k_1 + 6k_2 = 4 & \Rightarrow k_1 + 6k_2 = 2 \end{aligned}$$

Svar:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2} \\ k_2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- c. Systemet ska vara observerbart. Eftersom observerbarhetsmatrisen

$$W_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

har full rang är systemet observerbart.

- d. Skatta tillstånden med t.ex. ett Kalman-filter.
4. Överst i figur 1 finns bodediagram för 4 olika processer. I figurerna finns allt av intresse representerat för de olika systemen. Det betyder att kurvorna fortsätter utanför diagrammet på liknande sätt och t.ex. inte bryter upp eller ner vid högre eller lägre frekvenser än vad som syns. Para ihop dessa diagram med 4 av de 6 Nyquistkurvor som finns nederst i samma figur. Motiveringar krävs, omotiverade lösningar ger ej poäng. (4 p)

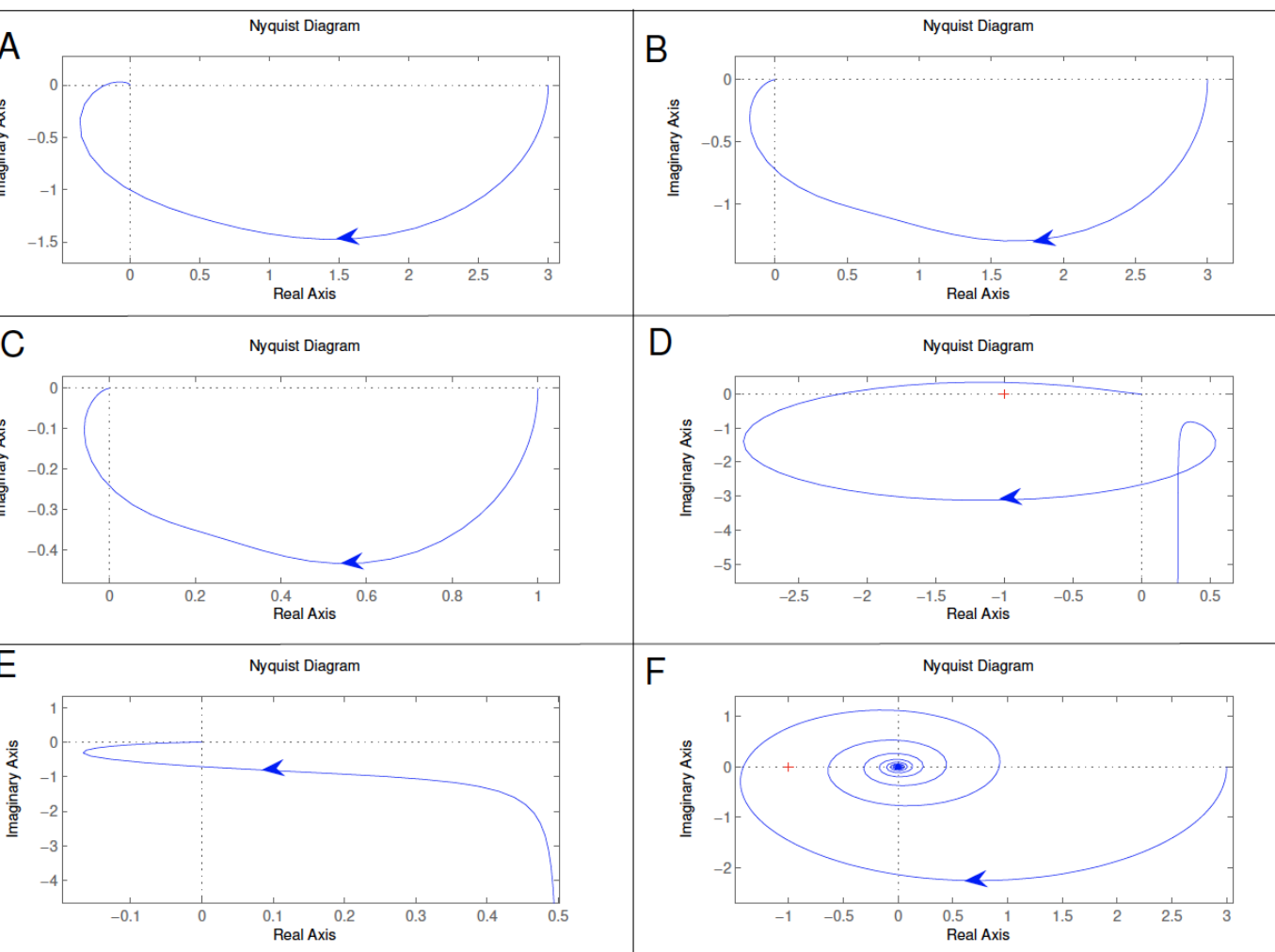
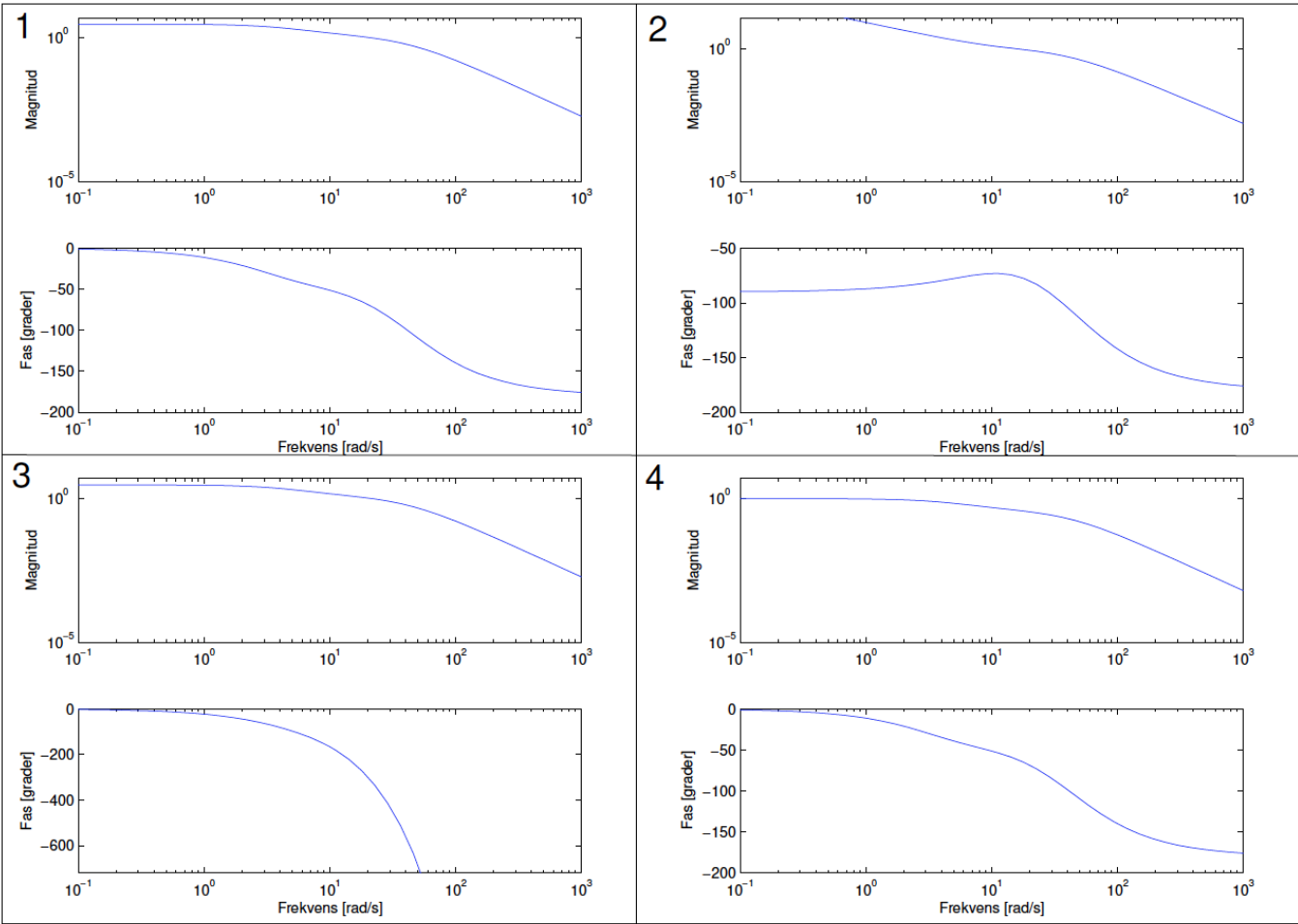


Figure 1 Bodediagram 1-4 och Nyquistdiagram A-F i uppgift 4.

Solution

Bodediagram nummer 3 har en faskurva som är typisk för ett system med tidsfördröjning. Av Nyquistkurvorna är det bara F som har argument lägre än -270 grader. Det ser man på att kurvan korsar den positiva imaginära axeln.

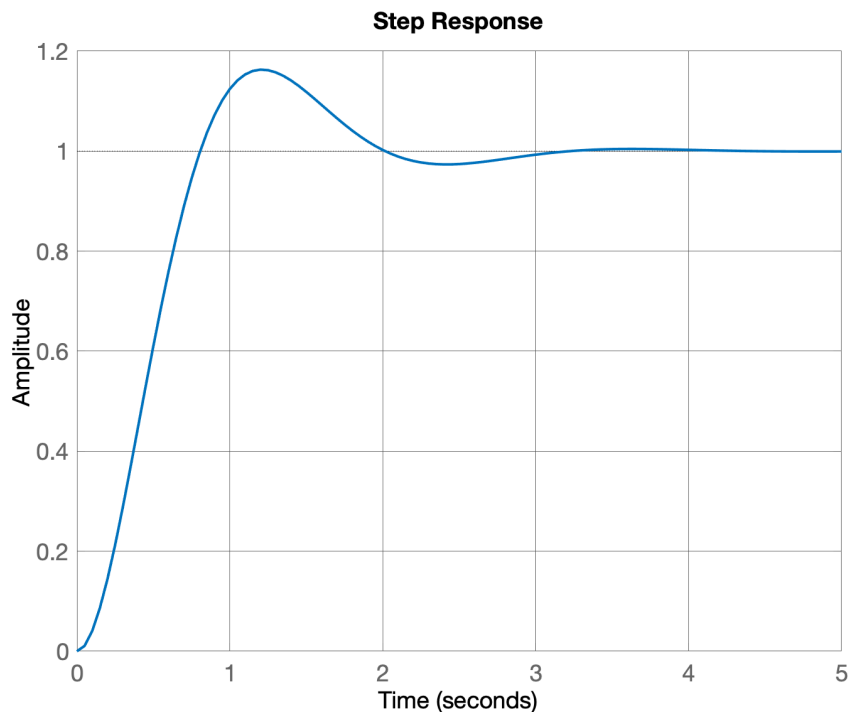
Bodekurva 2 innehåller en integrator som gör att fasen börjar i -90 grader. Det stämmer överens med Nyquistkurva D och E . Det slutliga argumentet ska emellertid hamna i -180 grader, vilket betyder att E är den Nyquistkurva som hör samman med 2.

Bodediagram nummer 4 har statiska förstärkningen 1 (alltså värdet vid frekvensen $\omega = 0$ rad/s). Det svarar mot startpunkten för Nyquistkurvan. Alltså hör 4 samman med C .

Slutligen kan vi säga att av de återstående bodediagram så hör nummer 1 samman med Nyquistkurva B , ty fasen ska inte gå under -180 grader.

Svar: 1-B, 2-E, 3-F, 4-C

5. En process styrs med en PID -regulator $u = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de}{dt} \right)$, där $e = r - y$. En stegändring i referensen r från 0 till 1, vid tiden $t = 0$, ger upphov till att processens utsignal y ändras som i figur 2. I hela uppgiften antar vi att regulatorparametrarna K , T_i och T_d är positiva. Dessutom vet vi att utsignalen var noll för tider $t < 0$.
- För tiden $t = 1$, ange om P -delen ger ett positivt eller negativt bidrag till styrsignalen u . Motivera! (2 p)
 - För tiden $t = 1$, ange om I -delen ger ett positivt eller negativt bidrag till styrsignalen u . Motivera! (2 p)
 - För tiden $t = 1$, ange om D -delen ger ett positivt eller negativt bidrag till styrsignalen u . Motivera! (2 p)
 - Vilket värde har det slutna systemets statiska förstärkning? (2 p)



Figur 2 Stegsvaret $y(t)$ i uppgift 5

Solution

- Reglerfelet är negativt eftersom referensen är mindre än utsignalen. Eftersom P -delen är proportionell mot felet kommer den att ge ett negativt bidrag till styrsignalen.
- I -delen integrerar reglerfelet e (referens minus utsignal) från tiden *noll*. Vid $t = 1$ s kommer denna integral fortfarande att vara större än noll (positiv area). I -delen ger således ett positivt bidrag till styrsignalen.

- c. D -delen i PID -regulatorn är proportionell mot derivatan av reglerfelet. Reglerfelet e minskar ända tills utsignalen når sitt toppvärde. Därmed är derivatan negativ vid den givna tiden och D -delen är således också negativ.
- d. I stegsvaret ser vi att processens utsignal går mot referensvärdet, vilket betyder att den stationära förstärkningen är 1.
6. Ange om följande är sant eller falskt. Korta motiveringar krävs. (4 p)
1. En integrator $1/s$ har en faskurva som är konstant -90° för alla frekvenser.
 2. En pol närmare origo (i s -planet) ger snabbare systemrespons.
 3. Fasmarginal mäts vid den frekvens där amplitudkurvan skär 0 dB-linjen i Bode-diagrammet.
 4. Större integral tid T_i ger bättre eliminering av laststörningar

Solution

1. **Sant.** En integrator $G(s) = 1/s$ har $\angle G(j\omega) = \angle(1/j\omega) = -90^\circ$ för alla $\omega > 0$.
 2. **Falskt.** En reell pol närmare origo (mindre $|\Re(p)|$ i vänstra halvplanet) ger *större* tidskonstant $\tau = -1/\Re(p)$ och därmed långsammare respons.
 3. **Sant.** Fasmarginal definieras vid *gain crossover* frekvensen ω_{gc} där Nyquist-kurvan skär enhetscirkeln. Det sker då $|L(j\omega_{gc})| = 1$ (0 dB). Fasmarginalen ges då av $PM = 180^\circ + \angle L(j\omega_{gc})$.
 4. **Falskt.** Integraldelens förstärkning är $K_i = K/T_i$; större $T_i \Rightarrow$ mindre $K_i \Rightarrow$ svagare/ långsammare eliminering av laststörningar. Extremfallet $T_i = \infty$ ger ingen I-del alls.
7. I en industri finns en maskin med överföringsfunktionen

$$G_p(s) = \frac{3}{s(s+3)^2}$$

En processingenjör har designat en proportionalregulator med förstärkningen $K = 2$. Systemet blir stabilt vid återkoppling och stegsignaler i börvärdet följs tillfredsställande. Tyvärr har designen dock misslyckats med avseende på rampföljning av börvärdet eftersom rampfelet blivit för stort, se figur 3.

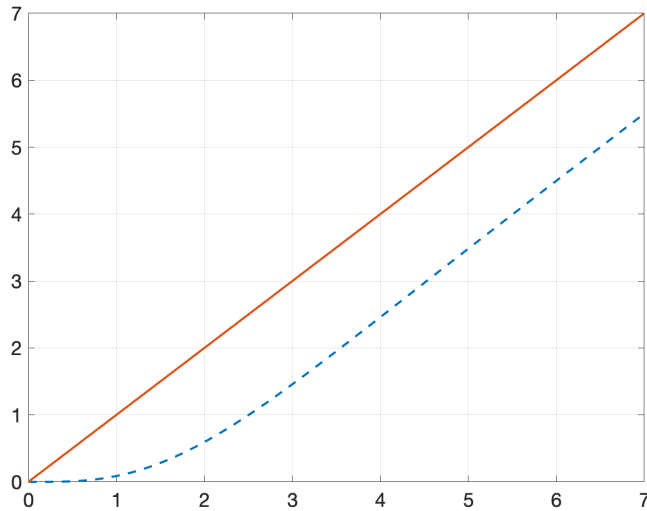
- a. Hjälp processingenjören att designa en kompenseringslänk som minskar det stationära rampfelet till 0.15 och som minskar fasmarginalen med högst 6° . Två av de mest använda kompenseringslänkarna är

$$G_{K_1}(s) = \frac{s+a}{s+a/M}, \quad M > 1$$

$$G_{K_2}(s) = K_K N \frac{s+b}{s+bN}, \quad N > 1$$

Välj lämplig kompenseringslänk och ange parameterarnas värden. (5 p)

- b. Rita blockschemat för det återkopplade systemet där kompenseringslänken används. (1 p)



Figur 3 Börvärde (heldragen) och utsignal (streckad) för systemet i uppgift 7.

Solution

- a.** Eftersom det är ett stationärt fel vid rampsignal som ska minskas, ska förstärkningen för låga frekvenser ökas. Således är det en fasretarderande kompenseringslänk $G_{K_1}(s)$ som ska användas, vilken specificeras av de två parametrarna M och a .

Från figur 3 är rampfelet hos det icke-kompenserade systemet 1.5 och enligt specifikationen ska det minskas till 0.15, dvs minskas en faktor 10. Eftersom systemet redan innehåller en integrator kan vi direkt dra slutsatsen att M ska väljas till 10.

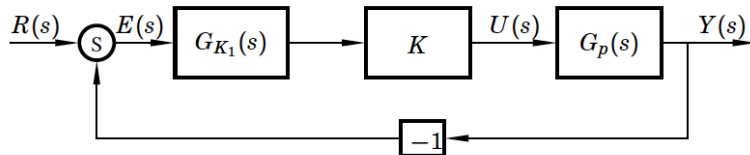
Från tumregeln i föreläsningssanteckningarna fås att $a = 0.1 \omega_c$, där ω_c är systemets skärfrekvens (dvs med nuvarande $K = 2$ inkopplat). Vi får

$$|KG_p(i\omega_c)| = 3K \left| \frac{1}{i\omega_c(i\omega_c + 3)^2} \right| = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\omega_c(\omega_c^2 + 3^2)} = 1$$

Numerisk lösning på räknare ger $\omega_c \approx 0.64$. Kompenseringslänken blir därför

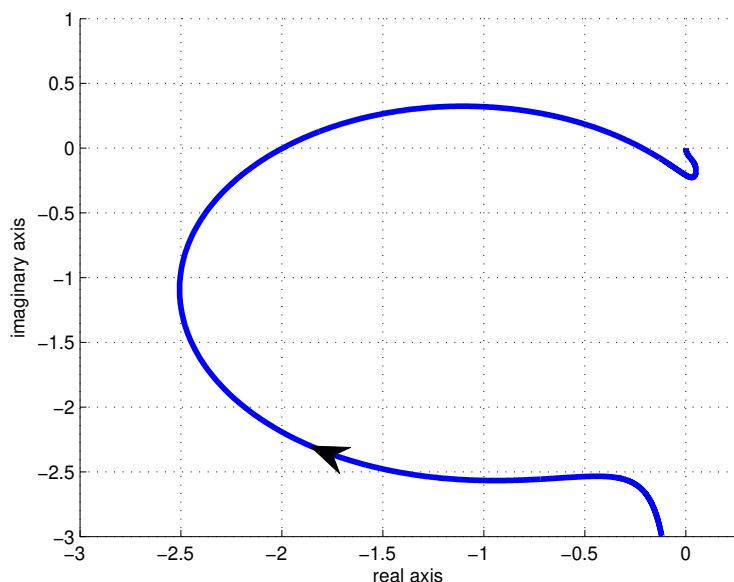
$$G_{K_1}(s) = \frac{s + 0.064}{s + 0.064/10}$$

- b.** Se Figur 4. De två regulatorblocken kan också byta plats, eller slås samman till ett block, som då ska innehålla $K = 2$ faktorn.
- 8.** Två stabila system har överföringsfunktionerna $G_1(s)$ respektive $G_2(s)$. Deras Nyquistdiagram kan ses i figur 5 och 6. (De delar av kurvorna som inte syns fortsätter neråt i diagrammen).



Figur 4 Blockdiagram för kompenserat system i uppgift 7.

- G_1 regleras med en P-regulator. För vilka värden på regulatorförstärkningen $K > 0$ blir det slutna systemet stabilt? (2 p)
- G_2 regleras med en P-regulator. För vilka värden på regulatorförstärkningen K blir det slutna systemet stabilt? (2 p)
- För vilka värden på $K > 0$ får vi en fasmarginal på minst 45° när vi reglerar G_2 ? (2 p)

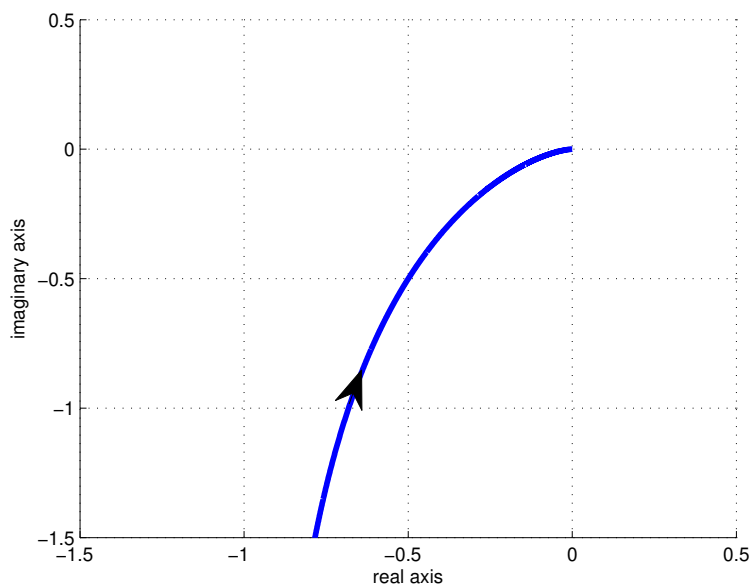


Figur 5 Nyquistdiagram för G_1 i uppgift 8.

Solution

De öppna systemen är stabila, så vi använder förenklade Nyquistkriteriet.

- Nyquistkurvan skär den negativa reella axeln vid två punkter: vid -2 och vid cirka -0.2 . Det slutna systemet blir alltså stabilt om $K < \frac{1}{2}$ eller om $K > \frac{1}{0.2} = 5$ (även $K > 4$ ger godkänt).
- Nyquistkurvan skär aldrig den negativa reella axeln. Alltså går det bra med alla $K > 0$.



Figur 6 Nyquistdiagram för G_2 i uppgift 8.

- c. I figuren ser man att vinkeln till den negativa reella axeln hela tiden avtar när frekvensen ökar. I punkten $(-0.5, -0.5)$ är vinkeln 45° . Den punkten har absolutbeloppet $\sqrt{(-0.5)^2 + (-0.5)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Det innebär att om $K \leq \sqrt{2}$ så blir fasmarginalen $\varphi_m \geq 45^\circ$, och för $K > \sqrt{2}$ blir fasmarginalen mindre än 45° .