



LUNDS
UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 26 april 2025 kl 8–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 50 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 24 poäng

4: lägst 34 poäng

5: lägst 44 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematisk tabellsamling (TEFYMA eller motsvarande), institutionens formelsamling i reglerteknik, samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet rapporteras via Ladok. Facit kommer vara tillgängligt via Canvas. Tid och plats för tentavisning meddelas via mail.

1. Betrakta systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x.\end{aligned}$$

- a. Vad är överföringsfunktionen $G(s)$? (4 p)
- b. Beräkna systemets poler. Är systemet instabilt, stabilt eller asymptotiskt stabilt? (2 p)

Solution

- a. Överföringsfunktionen från u till y ges av $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, dvs

$$G(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+5 & 0 \\ -1 & s-3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+5)(s-3)}.$$

- b. Polerna till systemet ges av rötterna till nämnarpolynomet $(s+5)(s-3)$, dvs av $s = -5$ och $s = 3$. Eftersom en pol ligger i höger halvplan är systemet instabilt.

2. Betrakta följande olinjära differentialekvationer.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + u^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \sqrt{x_2}.\end{aligned}$$

- a. Antag att $u^0 = 1$ och bestäm systemets stationära punkt. (1 p)
- b. Linjärisera systemet kring den stationära punkt du fick fram i a. (4 p)
- c. Är det linjäriserade systemet asymptotiskt stabilt? (1 p)

Solution

- a. Stationära punkter beräknas genom att sätta $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, vilket ger

$$\begin{aligned}0 &= -x_1^0 + 1^2 \\ 0 &= -x_1^0 + \sqrt{x_2^0},\end{aligned}$$

varifrån vi får stationär punkt $(u^0, x_1^0, x_2^0) = (1, 1, 1)$.

- b. Beräkning av partiella derivator av de två ekvationerna (som vi betecknar f_1 och f_2) ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= -1, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 0, & \frac{\partial f_1}{\partial u} &= 2u, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -1, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{2\sqrt{x_2}}, & \frac{\partial f_2}{\partial u} &= 0\end{aligned}$$

Sätter vi in stationär punkt $(u^0, x_1^0, x_2^0) = (1, 1, 1)$ får vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(1, 1, 1) &= -1, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(1, 1, 1) &= 0, & \frac{\partial f_1}{\partial u}(1, 1, 1) &= 2, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(1, 1, 1) &= -1, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(1, 1, 1) &= 0.5, & \frac{\partial f_2}{\partial u}(1, 1, 1) &= 0\end{aligned}$$

och om vi introducerar nya variabler

$$\begin{aligned}\Delta x &= x - x^0 \\ \Delta u &= u - u^0\end{aligned}$$

får vi det linjäriserade systemet

$$\Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u.$$

- c. Nej, egenvärdena till A-matrisen ges av -1 och 0.5 och ett av dessa är positivt. Systemet är därför instabilt.

3. Insignal och utsignal från ett system med överföringsfunktion enligt

$$G(s) = \frac{b}{s + a}$$

är given i figur 1. Bestäm numeriska värden på a och b . (4 p)

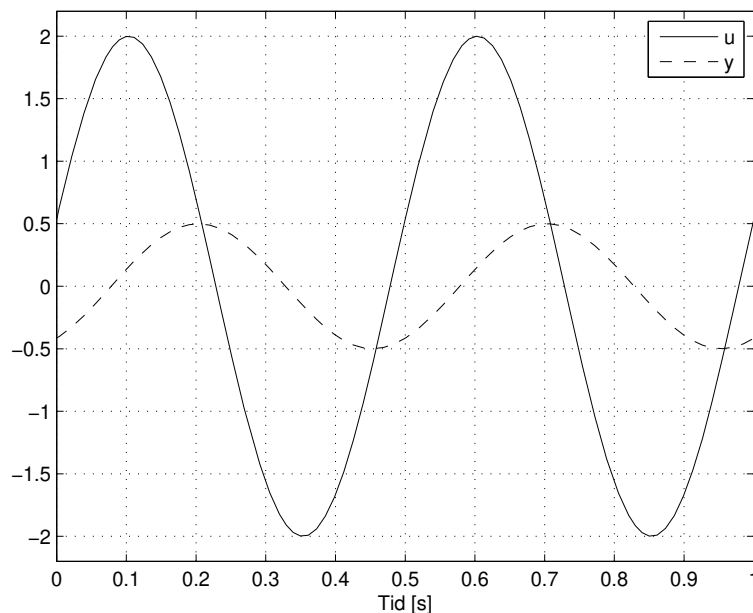


Figure 1 Insignal $u(t)$ och utsignal $y(t)$ för systemet i uppgift 3.

Solution

I figuren ser man att avståndet mellan två toppar är 0,5 s (dvs. periodtiden $T = 0,5$ s), vilket ger vinkelfrekvensen $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi$ rad/s. Vidare kan man läsa av att amplituden på utsignalen är en fjärdedel av amplituden på insignalen, och överföringsfunktionens förstärkning är därför 0,25. Slutligen kan även förskjutningen mellan in- och utsignal läsas av till 0,1 s, vilket ger fasförskjutningen $\varphi = \omega \cdot 0,1 = 0,4\pi$, och eftersom utsignalen ligger efter insignalen kommer fasförskjutningen att vara negativ.

Då en sinussignal skickas in till ett linjärt och tidsinvariant system kommer utsignalen också att vara en sinussignal med samma frekvens, men med amplituden $|G(i\omega)|A_0$ om amplituden på insignalen är A_0 , insignalen har vinkelfrekvensen ω och systemet har överföringsfunktionen $G(s)$. Utsignalen kommer dessutom att ha fasförskjutningen $\arg G(i\omega)$.

För överföringsfunktionen gäller (1) och (2) vid vinkelfrekvensen $\omega = 4\pi$ rad/s:

$$|G(i4\pi)| = \frac{b}{\sqrt{(4\pi)^2 + a^2}} \quad (1)$$

$$\arg G(i4\pi) = -\arctan\left(\frac{4\pi}{a}\right) \quad (2)$$

Den från figuren uppmätta fasförskjutningen tillsammans med (2) ger (3). Parametern a kan då räknas ut enligt (4).

$$-0,4\pi = -\arctan\left(\frac{4\pi}{a}\right) \quad (3)$$

$$a = \frac{4\pi}{\tan(0,4\pi)} \approx 4,1 \quad (4)$$

Den uppmätta förstärkningen tillsammans med (1) ger (). Parametern b kan då räknas ut enligt ().

$$0,25 = \frac{b}{\sqrt{(4\pi)^2 + a^2}}$$

$$b = 0,25\sqrt{(4\pi)^2 + a^2} \approx 3,3$$

4. Man vill reglera en motor beskriven av (6 p)

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s(s+1)}U(s)$$

med en PD-regulator $U(s) = (k + k_d s)(R(s) - Y(s))$. Bestäm parametrarna k och k_d så att slutna systemets karakteristiska polynom ges av

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2,$$

där ζ och ω_0 är givna parametrar. Beskriv också hur parametrarna ζ och ω_0 påverkar slutna systemets snabbhet och dämpning.

Solution

Med $K = k + k_d s$ får vi slutna systemet $\frac{GK}{1+GK} = \frac{k+k_d s}{s^2+(1+k_d)s+k}$. Identifiering av nämnaren med $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$ ger

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_0 = 1 + k_d \\ \omega_0^2 = k \end{cases} \iff \begin{cases} k_d = 2\zeta\omega_0 - 1 \\ k = \omega_0^2. \end{cases}$$

Ett större värde på ω_0 ger ett snabbare system. Parametern ζ ligger mellan 0 och 1 där ett högre värde ger ett bättre dämpat system.

5. Ett system är givet på tillståndsform enligt

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

- Kan man med tillståndsåterkoppling $u = -Kx$ godtyckligt placera det slutna systemets poler? (2 p)
- Bestäm en tillståndsåterkoppling så att det slutna systemet får samtliga poler i $s = -3$. Antag att alla tillstånd kan mätas. (4 p)
- Antag nu att det endast är möjligt att mäta utsignalen y . Är det möjligt att ta fram ett Kalmanfilter så att skattningsfelen avtar godtyckligt snabbt? Vad är en lämplig polplacering för systemet i denna uppgift? (OBS. Inget Kalmanfilter behöver beräknas) (2 p)

Solution

- Att det ska vara möjligt att placera det slutna systemets poler godtyckligt är ekvivalent med att systemet är styrbart. Styrbarhetsmatrisen ges av

$$W_s = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Villkoret för styrbarhet är att W_s ska ha full rang. Det enklaste sättet att konstatera detta är att beräkna determinanten, som i detta fall blir -1 . Eftersom denna är skild från 0 har W_s full rang, och systemet är därmed styrbart.

- b. Vid tillståndsåterkoppling används styrlagen $u = -Kx$, där $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$. Det slutna systemets poler ges av egenvärdena till matrisen $A - BK$, vilka kan placeras genom att välja k_1 och k_2 . Dessa erhålls genom att lösa den karakteristiska ekvationen

$$\begin{aligned} \det(sI - (A - BK)) &= \left| s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \right) \right| = \\ &= \left| \begin{pmatrix} s & -1 \\ k_1 & s + 2 + k_2 \end{pmatrix} \right| = s^2 + (2 + k_2)s + k_1 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Att polerna för det slutna systemet ska hamna i $s = -3$ innebär att den karakteristiska ekvationen ska vara $(s + 3)^2 = s^2 + 6s + 9 = 0$. Jämförelse ger att $k_1 = 9$ och $k_2 = 4$.

- c. För att det ska vara möjligt att konstruera ett Kalmanfilter där skattningsfelen avtar godtyckligt snabbt måste systemet vara observerbart. Detta undersöks genom att beräkna rangen för observerbarhetsmatrisen.

$$W_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinanten för W_o är 1, vilket innebär att den har full rang och att systemet är observerbart.

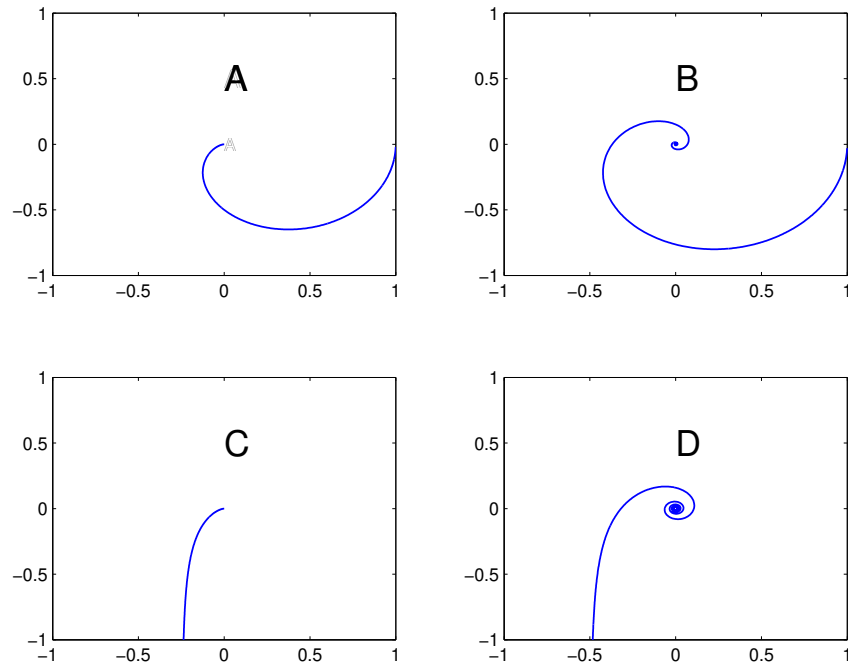
Polerna för Kalmanfiltret bör väljas snabbare än de för regulatorn, och en lämplig placering kan därför vara att placera dem båda i $s = -6$.

6. Vilka av följande påståenden är korrekta? Korta motiveringar krävs för poäng. Endast svar ger 0 poäng. (8 p)
- a. Polerna för ett linjärt dynamiskt system är lika med egenvärdena för systemets A -matris i kvadrat.
 - b. Om du vill minska det stationära felet för ett reglerat system är det lämpligt att införa en fasretarderande kompenseringslänk.
 - c. $G(s) = \frac{s^2+7s-5}{s^3+as^2+2s+9}$ är stabil för $0 < a < 5$.
 - d. När regulatorn $G_R(s) = \frac{s^2+6s+5}{s^2}$ styr processen $G_P(s) = \frac{3}{s+2}$ kan det slutna systemet följa referensen $r(t) = t$, $t \geq 0$ utan något stationärt fel. (Ledtråd: Det slutna systemet är asymptotiskt stabilt, detta behöver du inte visa.)
 - e. En fasretarderande kompenseringslänk med $M = \infty$ kan tolkas som en PI-regulator
 - f. Genom framkoppling kan alla laststörningar alltid elimineras.
 - g. Vid kaskadreglering bör det yttre systemet vara dubbelt så snabbt som det inre.
 - h. Om man seriekopplar två styrbara system så kan resultatet (dvs produkten $G_1(s)G_2(s)$) bli ett icke styrbart system.

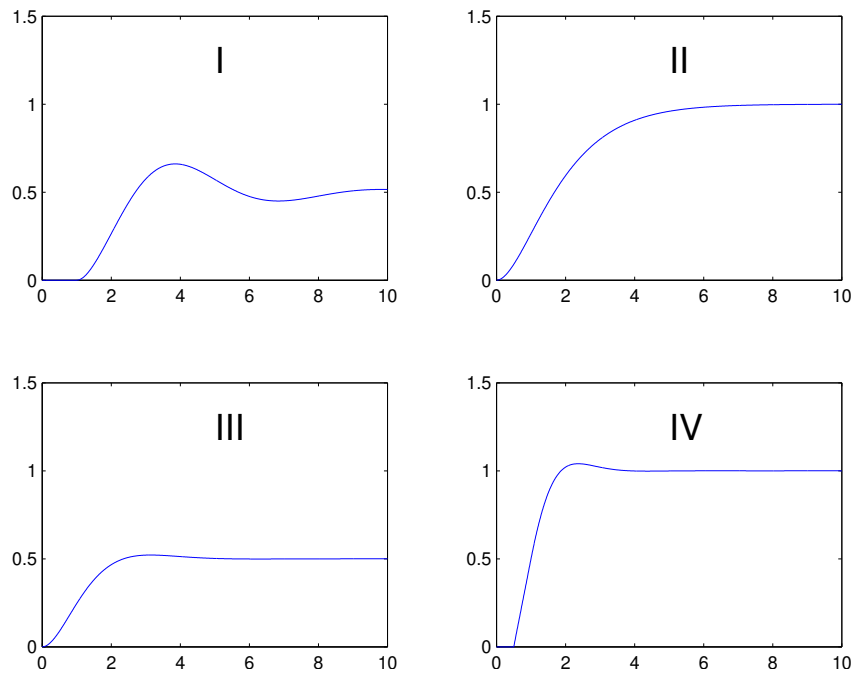
Solution

- a. Falskt. Polerna för ett linjärt dynamiskt system är lika med egenvärdena för systemets A -matris, inte dessa i kvadrat.
- b. Sant. En fasretarderande kompenseringslänk höjer förstärkningen vid låga frekvenser och minskar därmed det stationära felet.
- c. Falskt. En stabilitetssanalys visar att $G(s)$ är stabil för $a > 4,5$, inte för $0 < a < 5$.
- d. Sant. Det slutna systemet är stabilt (kan verifieras genom att ta fram dess överföringsfunktion) och eftersom det öppna systemet har två integratorer kan rampreferenser följas utan stationärt fel.
- e. Sant. Överföringsfunktionen går att skriva som $\frac{s+a}{s} = K(1 + \frac{1}{sT_i})$ med $K = 1$, $T_i = 1/a$.
- f. Falskt. Framkopplingsfiltret som skulle behövas för att eliminera störningen är ofta inte implementerbart. Om det till exempel finns en tidsfördröjning i systemet skulle framkopplingsfiltret kunna behöva innehålla en prediktorterm e^{sL} som inte är implementerbar.
- g. Falskt. Den inre reglerkretsen bör tvärtom oftast vara snabbare än den yttre.
- h. Sant. Om det sker en förkortning av ett nollställe och en pol kan styrbarhet (eller observerbarhet) förloras.

7. Para ihop Nyquist-kurvorna för de öppna systemen $G(s)$ i figur A–D med figurerna I–IV som visar utsignalerna för motsvarande slutna system, $G(s)/(1+G(s))$, då insignalen är ett steg med amplitud 1. Glöm inte motivering. (4 p)



Figur 2 Nyquistdiagram A-D för de öppna systemen $G(s)$. Nyquistkurvorna för C och D utanför figurerna fortsätter rakt neråt.

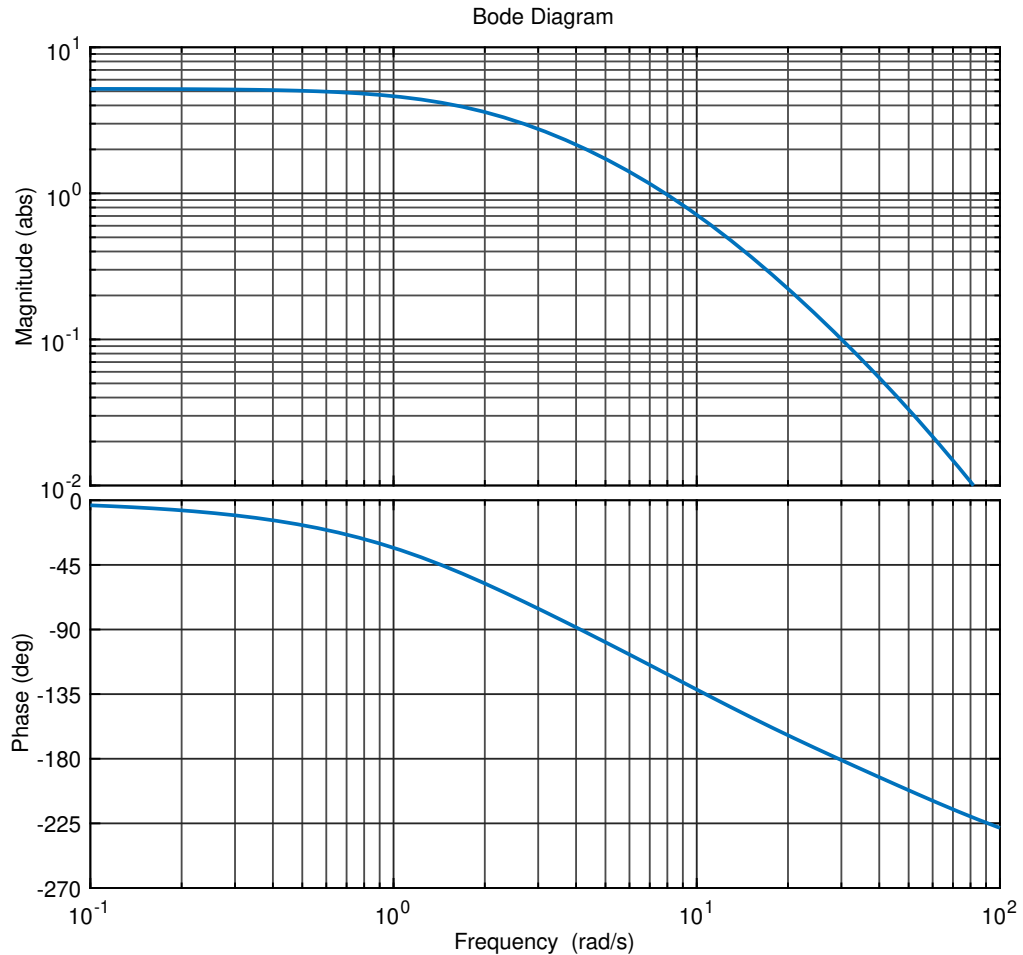


Figur 3 Stegsvär I-IV för de slutna systemen $\frac{G(s)}{1+G(s)}$.

Solution

Två av systemen har integralverkan (C,D) dessa ger stegsvar för det slutna systemet som slutar på nivå 1, dvs hör till II och IV. Två av systemet har tidsfördröjning (B,D). Dessa hör till stegsvaren I och IV. Vi får alltså A=III, B=I, C=II, D=IV.

8. Betrakta ett öppet system $G(s)$ vars bodediagram återges i figur 4. Designa en kombinerad fasavancerande och fasretarderande kompenseringslänk så att skärfrekvensen blir $\omega_c = 30$ rad/s, fasmarginalen blir $\varphi_m = 40$ grader, och statiska felet då referenssignalen är ett enhetssteg blir noll. (8 p)



Figur 4 Bode-diagram för systemet i uppgift 8.

Solution

Vi börjar med den fasavancerande länken $K_{lead}(s) = K_k N \frac{s+b}{s+bN}$. Avläsning i diagrammet visar att fasan vid den nya skärfrekvensen 30 rad/s är -180 grader före kompenserig. Eftersom vi vill ha 40 graders fasmarginal och eftersom vi senare kommer lägga till ett lag-filter som sänker fasan ytterligare 6 grader (om vi använder tumregeln) så vill vi höja fasan med 46 grader. Ur diagrammet i formelsamlingen avläser vi då $N = 6.1$. Formeln $\omega_c = b\sqrt{N}$ ger nu $b = \omega_c/\sqrt{N} = 30/\sqrt{6.1} = 12$. Vid skärfrekvensen behöver vi även höja förstärkningen med en faktor 10, vilket ger $K_k\sqrt{N} = 10$, dvs $K_k = 10/\sqrt{6.1} \approx 4$. Till sist ges lag-länken av (sätt $M = \infty$) $K_{lag}(s) = \frac{s+a}{s}$ med $a = 0.1\omega_c = 3$. Regulatorn ges alltså av

$$K(s) = K_{lead}(s)K_{lag}(s) \approx 25 \cdot \frac{s+12}{s+74} \cdot \frac{s+3}{s}$$