

Reglerteknik AK, FRTF05

Tentamen 20 mars 2025 kl 8–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 50 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 24 poäng

4: lägst 34 poäng

5: lägst 44 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematisk tabellsamling (TEFYMA eller motsvarande), institutionens formelsamling i reglerteknik, samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet rapporteras via Ladok. Facit kommer vara tillgängligt via Canvas. Tid och plats för tentavisning meddelas via Canvas.

1. Ett system ges av $Y(s) = G(s)U(s)$ med

$$G(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+1} \quad (1)$$

- a. Beräkna systemets poler och nollställen och sätt ut dessa i ett singularitetsdiagram (3 p)
- b. Är systemet asymptotiskt stabilt, stabilt eller instabilt? (1 p)
- c. Bestäm en differentialekvation på formen (ange a och b koefficienterna)

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$$

som beskriver systemet ovan för en allmän insignal $u(t)$. (2 p)

- d. Beräkna stegsvaret för systemet i ekvation (1), dvs ange tidssvaret $y(t)$ då insignalen är ett enhetssteg, $u(t) = \theta(t)$. (2 p)

Solution

a.

$$G(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+1} = \frac{4s+1}{s(s+1)}$$

Polerna ges av $s = 0$ och $s = -1$. Nollställe finns i $s = -1/4$.

- b. En enkel pol ligger på imaginära axeln, den andra i öppna vänstra halvplanet. Systemet är därför stabilt men inte asymptotiskt stabilt.
- c. Eftersom $Y(s) = \frac{4s+1}{s^2+s}U(s)$ så är $(s^2 + s)Y(s) = (4s + 1)U(s)$, dvs

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = 4\dot{u}(t) + u(t).$$

Koefficienterna är alltså $a_1 = 1, a_0 = 0, b_1 = 4, b_0 = 1$.

- d. Vårt system är en summa av två system. Systemet $\frac{1}{s}$ har stegsvaret $y(t) = t$, och $\frac{3}{s+1}$ har stegsvaret $y(t) = 3(1 - e^{-t})$. Vi får därför pga linjäritet

$$y(t) = t + 3(1 - e^{-t}).$$

2. Givet differentialekvationen $\dot{y} + 2y = u$

- a. Vad blir y stationärt då u är ett enhetssteg? (2 p)
- b. Återkoppla systemet med en valfri regulator så att felet $e = r - y$ försvinner i stationaritet, dvs $e(t) \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$. Bevisa även att det stationära felet försvinner. (4 p)

Solution

a. Laplace transform av differentialekvationen ger

$$(s+2)Y = U \\ \Rightarrow G_P(s) = \frac{1}{s+2}$$

Ett enhetssteg ges av $U(s) = \frac{1}{s}$. Slutvärdesteoremet (okej att använda då systemet är stabilt) ger då

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{1}{s+2} = \frac{1}{2}$$

Det stationära felet blir alltså 0.5. (Villket stämmer med vad man får genom att sätta $\dot{y} = 0$, vilket ju ger $2y = u = 1$, dvs $y = 0.5$.)

b. För att eliminera ett stationärt fel behöver en integrator finnas i regulatorn. Det enklaste är att använda $G_R(s) = \frac{1}{s}$. Överföringsfunktionen för det slutna systemet blir då

$$G_{cl}(s) = \frac{G_R G_P}{1 + G_R G_P} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Det stationära felet ges då av

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + 1} = 0$$

Slutvärdesteoremet får användas eftersom systemet är asymptotiskt stabilt: karakteriska polynomet är av andra ordningen med positiva koefficienter.

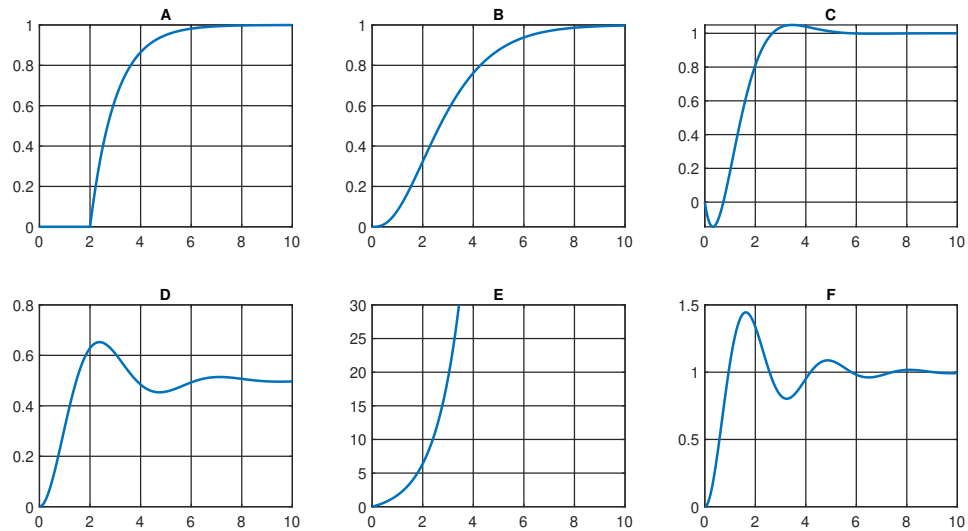
Många alternativa lösningar är möjliga.

3. Para ihop överföringsfunktionerna med stegsvaren A-F i figur 1. Motiveringar krävs. (6 p)

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+1)^3}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2}, \quad G_3(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1} \\ G_4(s) = \frac{4}{s^2 + s + 4}, \quad G_5(s) = \frac{2-s}{s^2 + 2s + 2}, \quad G_6(s) = \frac{1}{s-1}$$

Solution

- Man känner snabbt igen systemet med tidsfördröjning, vilket ger A=3
- Man ser också att det finns ett enda instabilt system: vilket ger E=6
- Det finns bara ett system som har stationär förstärkning $G(0) = 0.5$, detta ger D=2.
- Ett system har nollställe i höger halvplan, detta ger ett stegsvar som går i fel riktning i början med $\dot{y}(0) < 0$, detta ger C = 5. (Begynnelsevärdesteoremet ger att $\dot{y}(0) = -1$ om man vill veta exakt.)



Figur 1 Stegsvär A-F

- G_1 är ett system med bara reella poler, inga nollställen. Detta ger ett stegsvar utan översläng, som ju därför måste svara mot B eftersom vi kan utesluta de övriga.
- Kvar är ett typiskt andra ordningens system G_4 . Räknar man ut dess parametrar får man $\omega = 2$ och $\zeta = 0.5$, vilket stämmer bra med F=4.

Svar: ABCDEF = 315264, alternativt 123456=BDAFCE

4. Betrakta systemet

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + u^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - x_2 + 1 \\ y &= x_1^2 + x_2\end{aligned}$$

- a. Finn alla stationära punkter (x_1^0, x_2^0, u^0) för systemet ovan, där x_1^0 och x_2^0 är uttryckta som funktioner av insignalen u^0 . (2 p)
- b. Linjärisera systemet när $u^0 = 1$. (4 p)
- c. Visa att det linjäriserade systemet är asymptotiskt stabilt oberoende av linjäriseringspunkt. (2 p)

Solution

För att förenkla uttrycken inför vi $f_1(x_1, x_2, u)$, $f_2(x_1, x_2, u)$ och $g(x_1, x_2, u)$ så att systemet kan skrivas

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) \\ y &= g(x_1, x_2, u)\end{aligned}$$

- a. Vi finner de stationära punkterna genom att sätta $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Ekvationen $f_1(x_1, x_2, u) = 0$ ger då $x_1^0 = (u^0)^2$. Sätter vi in detta i ekvationen $f_2(x_1, x_2, u) = 0$ får vi $0 = (x_1^0)^2 - x_2^0 + 1$ vilket ger $x_2^0 = (x_1^0)^2 + 1 = (u^0)^4 + 1$. Sammantaget ges de stationära punkterna av

$$(x_1^0, x_2^0, u^0) = ((u^0)^2, (u^0)^4 + 1, u^0)$$

- b. För $u^0 = 1$ är den stationära punkten $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (1, 2, 1)$.

Vi inför nya variabler $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$, $\Delta u = u - u^0$, och $\Delta y = y - y^0$. Det linjäriserade systemet ges då av

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} + B \Delta u \\ \Delta y &= C \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} + D \Delta u\end{aligned}$$

där

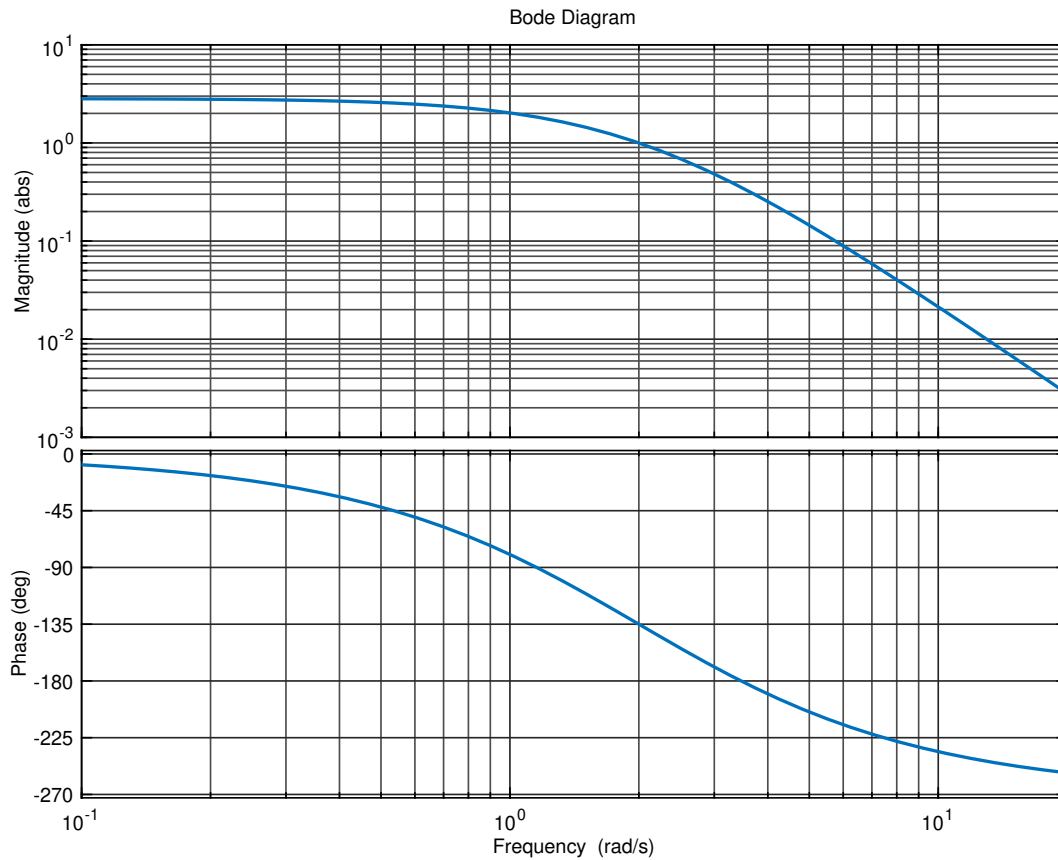
$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Big|_{x_1^0, x_2^0, u^0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2x_1^0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix} \Big|_{x_1^0, x_2^0, u^0} = \begin{pmatrix} 2u^0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Big|_{x_1^0, x_2^0, u^0} = \begin{pmatrix} 2x_1^0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \\ D &= \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{x_1^0, x_2^0, u^0} = 0\end{aligned}$$

c. Från uppgift (b) har vi

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2x_1^0 & -1 \end{pmatrix}$$

A-matrisens egenvärden är $\{-1, -1\}$ oberoende av värdet på x_1^0 , det vill säga alla egenvärden ligger i vänster halvplan och det linjäriserade systemet är asymptotiskt stabilt.

5. Ett reglersystem har dynamiken $G_0(s)$. Bodediagrammet för $G_0(s)$ visas i figur 3. Reglersystemets nuvarande snabbhet är otillräcklig. Designa en kompenseringslänk $G_K(s)$ som dubblar processens snabbhet utan att fasmarginalen ändras. (6 p)



Figur 2 Bodediagram för systemet i uppgift 5

Solution

Eftersom skärfrevensen ska ökas med bibehållen fasmarginal så behöver en fasavancerande länk användas

$$G_K(s) = K_K N \frac{s + b}{s + bN}.$$

Avläsning i Bodediagrammet ger att skärfrekvensen för det okompenserade systemet är $\omega_c = 2 \text{ rad/s}$ och att fasmarginalen är $\phi_m = 45^\circ$.

Att snabbheten ska ökas en faktor 2 innebär att skärfrekvensen behöver fördubblas, dvs $\omega_c^{\text{ny}} = 4 \text{ rad/s}$. Fasen för det okompenserade systemet vid ω_c^{ny} är

$\approx -190^\circ$. För att bibehålla fasmarginalen måste den fasavancerande länken ge en fasökning vid ω_c^{ny} på $-135^\circ - (-190^\circ) = 55^\circ$. Med hjälp av grafen i formelsamlingen inses att $N = 10$ är ett lämpligt val.

Att kompenseringslänkens maximala fasökning ska vara vid ω_c^{ny} ger att $b = \omega_c^{\text{ny}}/\sqrt{N} = 4/\sqrt{10} \approx 1.3$.

För att det kompenserade systemet ska få en skärfrekvens vid ω_c^{ny} måste

$$|G_K(i\omega_c^{\text{ny}})G_P(i\omega_c^{\text{ny}})| = 1.$$

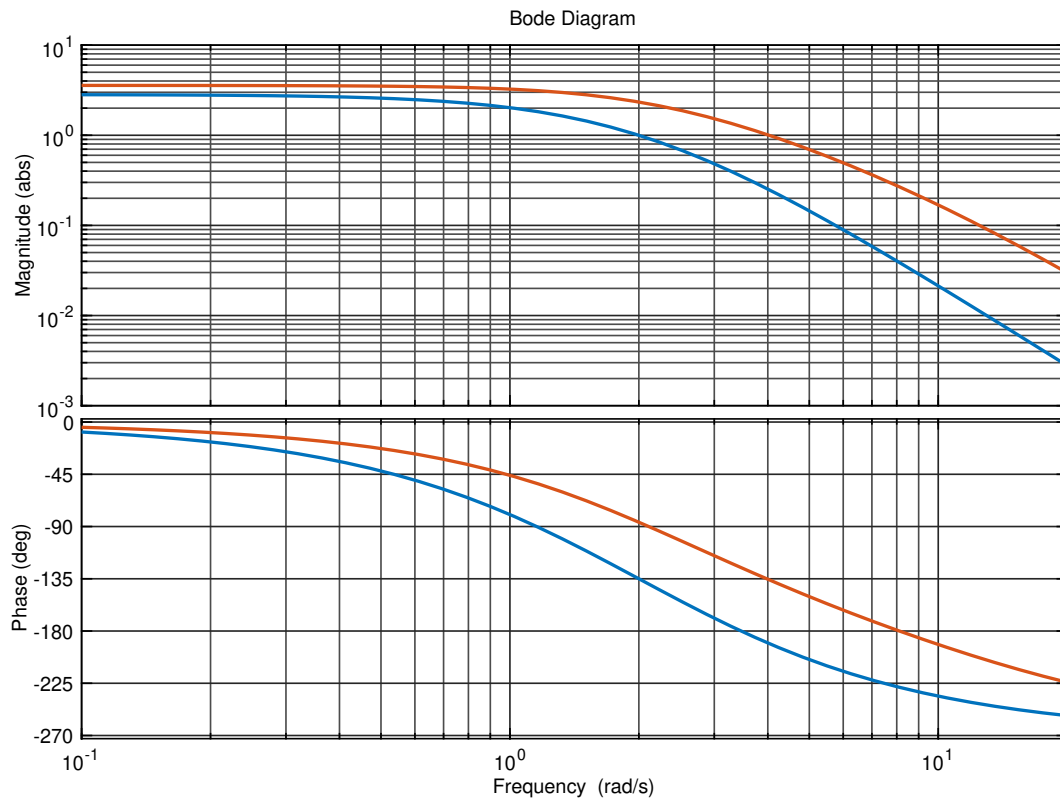
Länkens förstärkning vid frekvensen med maximal fasökning är $K_K\sqrt{N}$, avläsning i Bodediagrammet ger att $|G_P(i\omega_c^{\text{ny}})| = 0.25$, sålunda fås

$$K_K = \frac{1}{0.25\sqrt{N}} \approx 1.3.$$

Sammanfattningsvis så ska kompenseringslänken väljas till

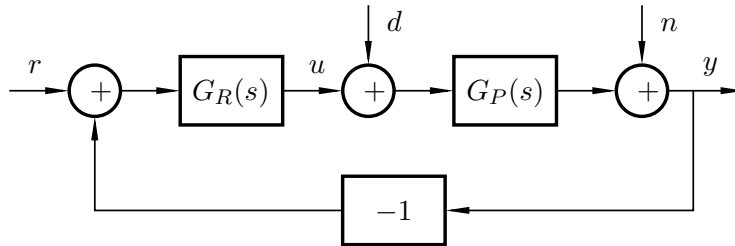
$$G_K(s) = 13 \frac{s + 1.3}{s + 13}.$$

Systemet, med och utan kompenseringslänk, visas i figuren nedan.



Figur 3 Bodediagram för systemen i uppgift 5, lösningen ger röd kurva.

6. Blockschemat för ett reglersystem visas nedan. För att bedöma ett system räcker det oftast inte med att bara titta på överföringsfunktionen $G_{yr} = \frac{G_P G_R}{1 + G_P G_R}$ från referensvärde till utsignal, dvs från $r \rightarrow y$, utan det finns fler intressanta överföringsfunktioner att ta hänsyn till.



- a. Ta fram motsvarande uttryck för de tre överföringsfunktionerna

- G_{yd} , dvs från $d \rightarrow y$,
- G_{yn} , dvs från $n \rightarrow y$,
- G_{ur} , dvs från $r \rightarrow u$.

(3 p)

- b. Antag nu att processen ges av

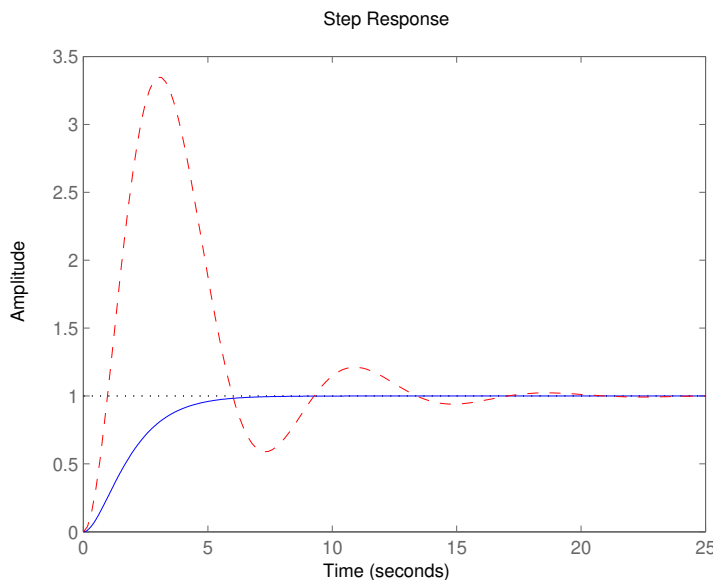
$$G_P(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

och ska regleras med en PI-regulator $G_R(s) = K(1 + 1/(sT_i))$. Vilka villkor gäller för K och T_i för att samtliga fyra överföringsfunktioner, som nämnts ovan ska vara stabila (dvs G_{yr} , G_{yd} , G_{yn} och G_{ur}) ?

(3 p)

- c. Utsignalen y då referensvärdet r är ett steg visas i figur 4 för två olika parameteruppsättningar på regulatorn. Vilken av dessa två parameterinställningar skulle du föredra om du måste välja? Motivera svaret nogga.

(2 p)



Figur 4 Stegsvär på referensvärdesändring. Den streckade linjen visar fallet då regulatorparameterarna är $K = 3$, $T_i = 9$ den heldragna linjen visar fallet då $K = 1$, $T_i = -1$.

Solution

a.

$$G_{yr} = \frac{G_P G_R}{1 + G_P G_R}, \quad G_{yd} = \frac{G_P}{1 + G_P G_R}$$

$$G_{yn} = \frac{1}{1 + G_P G_R}, \quad G_{ur} = \frac{G_R}{1 + G_P G_R}.$$

b. En PI-regulator har överföringsfunktionen

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) = K \frac{s + 1/T_i}{s}.$$

Kretsöverföringsfunktionen blir

$$G_0(s) = G_P(s)G_R(s) = \frac{K(s + 1/T_i)}{s^3 + s^2 - 2s} = \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

polerna för det slutna systemet ges i samtliga fall av det karakteristiska polynomet

$$P(s) + Q(s) = s^3 + s^2 + (K - 2)s + K/T_i$$

Detta ger stabilitetsvillkoren (se formelsamling för 3e ordningens polynom)

$$\begin{cases} K > 2 \\ K/T_i > 0 \\ (K - 2) > K/T_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K > 2 \\ T_i > K/(K - 2) \end{cases}.$$

c. Regulatorn med $K = 1$, $T_i = -1$ (blå kurva) ser mycket bättre ut om man endast tittar på detta stegsvaret. Parametrarna uppfyller dock inte stabilitetskraven från uppgift b) !

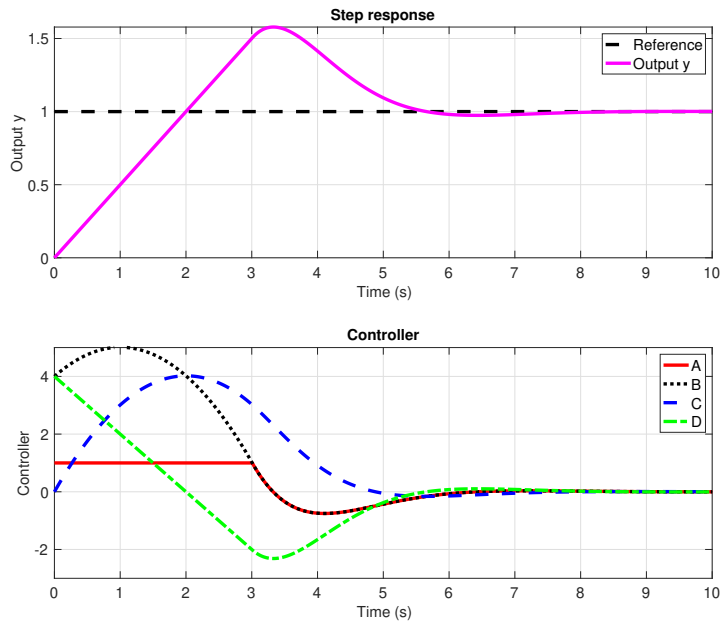
Anledningen till att stegsvaret från referensvärde ser så bra ut är att det sker en pol-nollställesförkortning av den instabila processpolen: PI regulatorn har med dessa parametrar överföringsfunktionen $G_R(s) = \frac{s-1}{s}$, så polen i $s = 1$ förkortas i uträkningen av $G_{yr} = \frac{s-1}{(s-1)(s+1)^2}$. Om man i stället räknar ut svaret från laststörningen d så syns det att man har ett instabilt system: $G_{yd} = \frac{s}{(s-1)(s+1)^2}$. Detta illustrerar det som sägs i problemtexten, att det inte räcker med att bara titta på överföringsfunktionen G_{yr} för att bedöma ett reglersystem.

Svar: Det lämpligaste valet av regulatorparametrar är det som ger upphov till det streckade stegsvaret i figuren. Detta val uppfyller åtminstone grundkravet att vi har ett stabilt system, även om prestandan i detta fallet kanske lämnar mer att önska.

7. Ett system $G_p(s) = \frac{0.5}{s}$ styrs med en PI-regulator $U(s) = K(1 + \frac{1}{sT_i})E(s)$ med $K = 4$, $T_i = 1$ implementerad i en dator. Figur 5 visar resultat efter en stegändring i referensvärdet. Systemet uppför sig inte som förväntat och uppvisar en stor översläng.

För att att felsöka har delresultat vid beräkningen av PI regulatorns styrsignal sparats och i den nedre bilden visas dess komponenter tillsammans med den verkliga uppmätta styrsignalen.

a. Förklara vad de fyra olika signalerna A, B, C, D visar. (4 p)



Figur 5 Stegsvär för systemet i uppgift 7

- b. Vad kallas fenomenet som orsakar problemet med överslängen? (2 p)
- c. Vad kallas metoden för att lösa problemet? Beskriv metoden. (2 p)

Solution

- a. En PI regulator består av en P-del och en I-del som summeras.

- P-delen, $u_P = 4(r - y)$, stämmer med D (grön kurva)
- I-delen, $u_I = 4 \int (r - y)dt$, stämmer med C (streckad blå kurva)
- Summan av dessa $u = u_P + u_I$ ger kurva B (svart prickad)

Vi ser dock att systemet de första tre sekunderna har en utsignal som växer med derivata = 0.5. Detta indikerar att vårt system $G_p(s) = \frac{0.5}{s}$, som ju svarar mot

$$\dot{y} = 0.5u,$$

får en verklig insignal $u = 1$, vilket inte stämmer med $u(t)$ i kurva B. Vi förstår därför att den verkliga uppmätta styrsignalen är kurva A (röd), och att det har uppstått en mättning som har begränsat styrsignalen till 1.

Detta är precis samma typ av situation som uppstod på laboration 2 och som diskuteras i implementeringsföreläsningen.

- b. Styrsignalmättning har resulterat i integrator-windup
- c. Antiwindup. En enkel antiwindup metod är att inte uppdatera I-delen om den uträknade styrsignalen mättar.