

Reglerteknik AK

Tentamen 5 april 2024 kl 8-13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 50 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift. OBS! Enbart hela poäng utdelas vid rättning.

Betyg 3: lägst 24 poäng

4: lägst 34 poäng

5: lägst 44 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurs-hemsidan.

Anvisningar (OBS!)

Skriv enbart på ena sidan av varje blad (d.v.s. inte på fram- och baksida!).

Påbörja varje ny uppgift (1-6) på nytt blad. Deluppgifter (a,b,c,...) kan dock lösas på samma sida.

Lösningsförslagen kan innehålla fel. Om du hittar något, hör gärna av dig till Emma på emma.tegling@control.lth.se så försöker vi rätta till det. Denna version: 8 april 2024.

Lycka till!

1. En process kan beskrivas med följande differentialekvation:

$$2\ddot{y} + 6\dot{y} + 4y = \frac{1}{2}\dot{u} + u$$

- a. Bestäm processens överföringsfunktion $G_P(s)$. (2 p)
- b. Bestäm systemets poler och nollställen. Är systemet asymptotiskt stabilt? (3 p)
- c. Vilket eller vilka av följande system på tillståndsform beskriver processen? Motivera ditt svar.

$$\begin{aligned} \text{(A)} : \quad \dot{x} &= -3x + u \\ y &= 0.25x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(B)} : \quad \dot{x} &= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0.25 \quad 0.5] x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(C)} : \quad \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0.25 \quad 0.5 \quad 0] x, \end{aligned}$$

(2 p)

Tips! Den styrbara alt. observerbara kanoniska formen i formelsamlingen kan vara till hjälp!

Solution

- a. Laplacetransform ger

$$\begin{aligned} 2s^2Y + 6sY + 4Y &= 1/2sU + U \\ Y(s) &= \underbrace{\frac{1/2s + 1}{2s^2 + 6s + 4}}_{G_P(s)} U(s) \end{aligned}$$

$$G_P(s) = \frac{0.25s + 0.5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{0.25(s + 2)}{(s + 2)(s + 1)} = \frac{0.25}{s + 1}$$

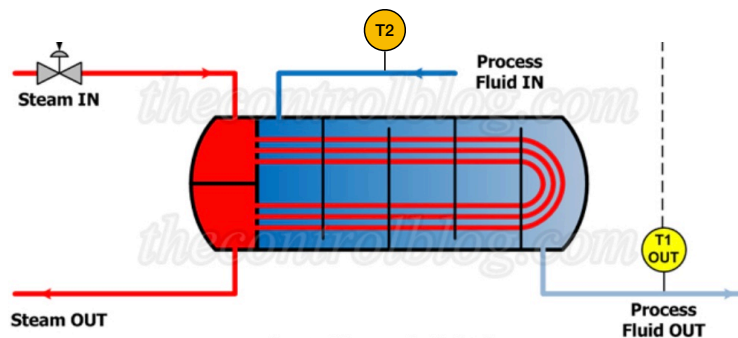
Förkortningen till ett första ordningens system behövdes inte för att få full poäng.

- b. Poler i $s_1 = -1$ $s_2 = -2$. Nollställe i -2. Systemet är asymptotiskt stabilt eftersom polerna ligger i väster halvplan.

Här har vi dock en pol-nollställesförkortning. Det återstår då bara en pol i -1. Fortfarande är systemet asymptotiskt stabilt. *Detta behöver inte inses för full poäng.*

- c. **Svar: B.** Alla system är på styrbar kanonisk form. A motsvarar överföringsfunktionen $G_A(s) = \frac{0.25}{s+3}$, vilket ej stämmer med vårt system. B motsvarar dock vår överföringsfunktion. C är av tredje ordningen och kan uteslutas (förutsatt att det är en minimal realisation). Vi kan kontrollera att $G_C(s) = \frac{0.25s^2+0.5s}{s^3+s^2+3s+2}$, vilket inte motsvarar vårt $G(s)$.

2. Värmeväxlare finns i många industriella processer. En schematisk bild av en värmeväxlare finns i figur 1. Här ska temperaturen $T1$ på en processvätska hållas på en konstant, hög temperatur. Detta åstadkommer man genom att skicka in processvätskan i en värmeväxlare. På andra sidan av värmeväxlaren förs varm ånga in i ett lämpligt flöde för att värma upp processvätskan lagom mycket: ett större flöde ger mer värme och vice versa. Flödet av ånga bestäms av en ventil. Processen behöver regleras eftersom temperaturen på processvätskan, innan den förs in i värmeväxlaren, kan variera kraftigt. (Vi antar däremot i detta fall att ångan är välreglerad och håller konstant tryck och temperatur.)



Figur 1: Illustration av en enkel värmeväxlare. Het ånga, vars flöde bestäms av ventilen, förs in till vänster, medan processvätskan som har varierande temperatur $T2$ förs in till höger. Bild: The controlblog.com, Shady Yehia

- a. Betrakta regleringen av värmeväxlaren, såsom det är beskrivet ovan, som ett regulatorproblem och föreslå vad som är

- i. mätsignal (utsignal) y
- ii. styrsignal (insignal) u
- iii. laststörning l

Motivera ditt svar. (2 p)

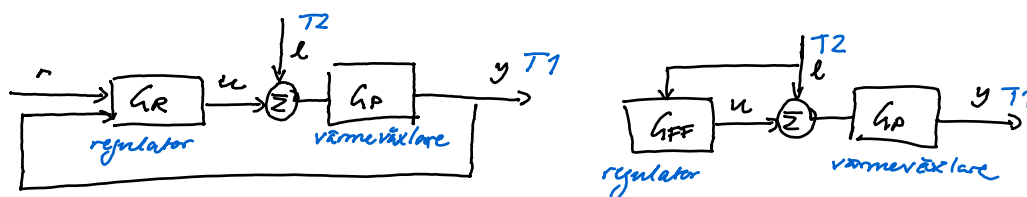
- b. Man diskuterar om det är bäst att använda framkoppling (från laststörning) eller återkoppling (från mätsignalen) för denna process.

- i. Förklara kortfattat hur båda fungerar med utgångspunkt i denna process.
- ii. Rita motsvarande blockdiagram
- iii. Svara på frågan om det är möjligt att kombinera fram- och återkoppling.

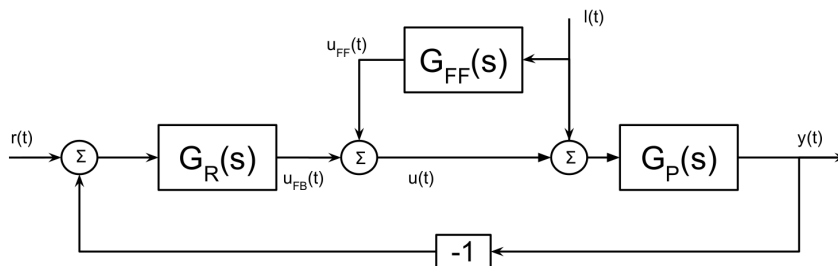
(3 p)

Solution

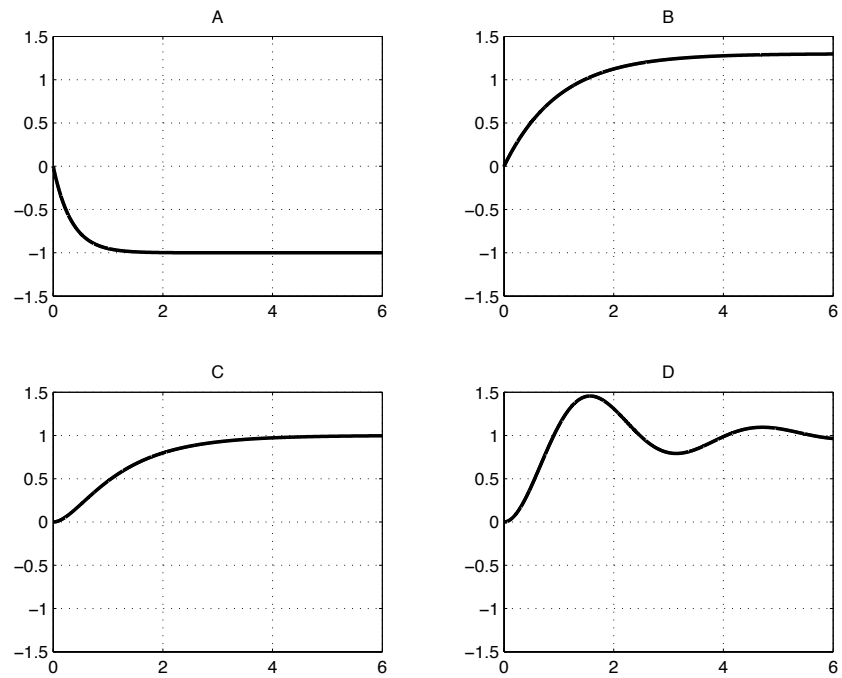
- a.
 - i. y är det vi vill styra, dvs temperaturen T_1 på processvätskan
 - ii. u är det vi styr med hjälp av, dvs flödet av het ånga, alt. ventilläget
 - iii. l är störningar som vi behöver reglera bort, dvs variationer i processvätskans temperatur.
- b.
 - i. Återkoppling: Mäta T_1 och reglera ångventilen därefter: mer flöde om T_1 är för låg, mindre om den är för hög.
 Framkoppling: Mät temperaturen T_2 på processvätskan innan den skickas in i värmeväxlaren. Öka flödet om temperaturen är låg, minska om den är hög.
 - ii. Se blockdiagram (återkoppling vänster, framkoppling höger):



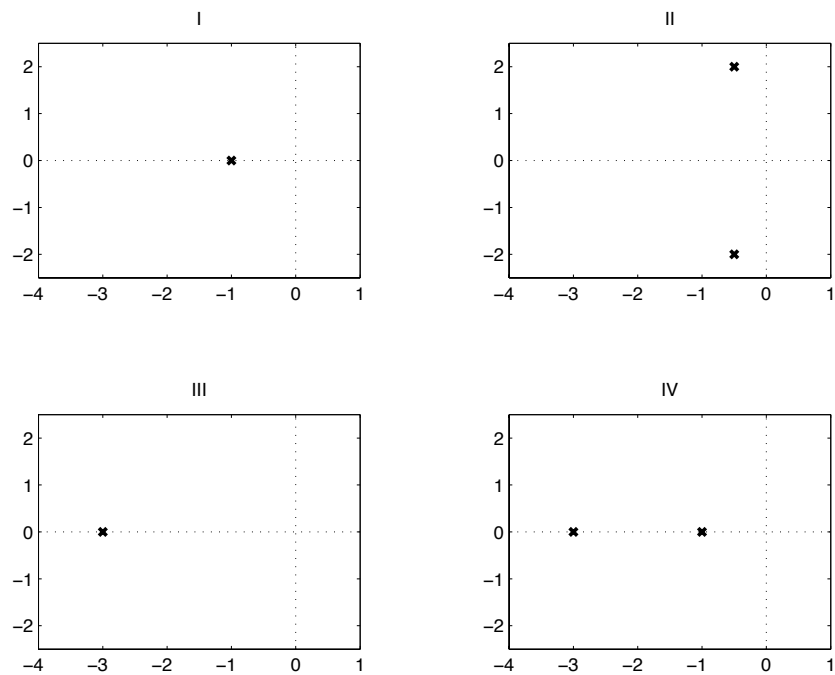
- iii. Ja, det är möjligt, och i detta fall rekommenderat, att kombinera fram- och återkoppling. Exempel på blockdiagram finns nedan.



3. Figur 2 visar fyra stycken stegsvar, det vill säga systemets svar på ett enhetssteg i insignalen. Motsvarande singularitetsdiagram för systemen visas i figur 3. Para ihop rätt stegsvar A-D med rätt singularitetsdiagram I-IV. Ta även fram överföringsfunktionerna för alla system.
 Motivera noga. (Även om ett stegsvar blir "över" behöver dess ihopparning motiveras för full poäng!) (6 p)



Figur 2: Stegsvär för uppgift 3



Figur 3: Singularitetsdiagram för uppgift 3. Poler är markerade med kryss 'x' och nollställena med ringar 'o'.

Solution

A $\rightarrow$ III. Första ordningens system med tidskonstant $\simeq 0.33$, dvs pol i -3. Att den statiska förstärkningen är -1 spelar ingen roll.

B $\rightarrow$ I. Första ordningens system med tidskonstant 1, dvs pol i -1. Statisk

förstärkning 1.3.

C -> IV. Andra ordningens system med reella poler, ty ingen översläng. Statisk förstärkning 1.

D -> II. Andra ordningens system med komplexa poler, ty svängigt. Statisk förstärkning 1.

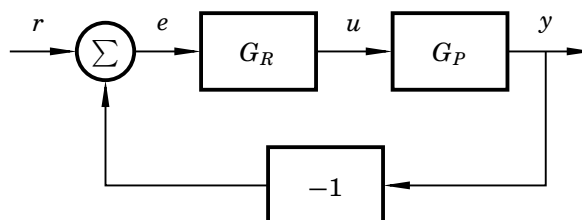
A -> III. $G(s) = \frac{-3}{s+3}$

B -> I. $G(s) = \frac{1.3}{s+1}$

C -> VI. $G(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)}$

D -> II. $G(s) = \frac{4.25}{s^2+s+4.25}$

Notera att parametrarna i täljaren hos överföringsfunktionerna fås från den statiska förstärkningen.



Figur 4: Återkopplat system i uppgift 4

4. Ett system med överföringsfunktion

$$G_P(s) = \frac{1}{s+7}$$

återkopplas med en PI-regulator

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right).$$

enligt blockdiagrammet i figur 4.

I denna uppgift kommer vi främst att analysera det slutna systemets överföringsfunktion.¹

- Låt $T_i = 1$. För vilka värden på $K > 0$ är det slutna systemet asymptotiskt stabilt? (2 p)
- Välj parametrarna K och T_i så det slutna systemets karakteristiska polynom blir $s^2 + 9s + 27$. (3 p)
- Bestäm om vart och ett av följande påståenden är sant eller falskt, motivera noga:

¹Tips! Kommande räkningar underlättas om du redan från början skriver det slutna systemets överföringsfunktion på standardformen $G(s) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$.

- i. Om T_i halveras jämfört med svaret i **b** minskar systemets relativa dämpning ζ och stegsvaret blir mer oscillativt.
- ii. Om T_i halveras jämfört med svaret i **b** ökar det stationära felet vid ett steg i referensen r . (3 p)
- d. Vad för typ av regulator erhålles om $T_i = \infty$? (1 p)

Solution

Slutna systemet ges av

$$G_{CL}(s) = \frac{K(1 + sT_i)}{sT_i(s + 7) + K(1 + sT_i)} = \frac{K(s + \frac{1}{T_i})}{s^2 + s(7 + K) + \frac{K}{T_i}}.$$

- a. Om $T_i = 1$ blir nämnarpolynomet $s^2 + s(7 + K) + K = s^2 + a_1s + a_2$. Dess rötter, dvs, systemets poler, ligger i vänster halvplan om och endast om $a_1, a_2 > 0$ (se formelsamling!). Alltså krävs $K > 0$ för att systemet ska vara asymptotiskt stabilt. Svaret är alltså *alla* $K > 0$.

- b. Identifiera

$$s^2 + s(7 + K) + \frac{K}{T_i} = s^2 + 9s + 27$$

ger $K = 2$, $T_i = \frac{2}{27}$.

- c. i. Parametrisera nämnarpolynomet som $s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$, vilket ger $\omega = \sqrt{\frac{K}{T_i}}$ och $\zeta = \frac{7+K}{2\omega} = \frac{7+K}{2} \sqrt{\frac{T_i}{K}}$, så om T_i halveras minskar ζ med en faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Du kan även beräkna polerna och jämföra imaginärdelarna, som blir mycket större om T_i , integraltiden, halveras.
Svar: SANT. Lägre relativ dämpning, större imaginärdel, ger mer oscillativt/svängigt stegsvar.
- ii. Vi vet att en PI-regulator eliminerar stationära fel, oavsett (ändlig) integraltid T_i . Detta kan vi testa genom att analysera

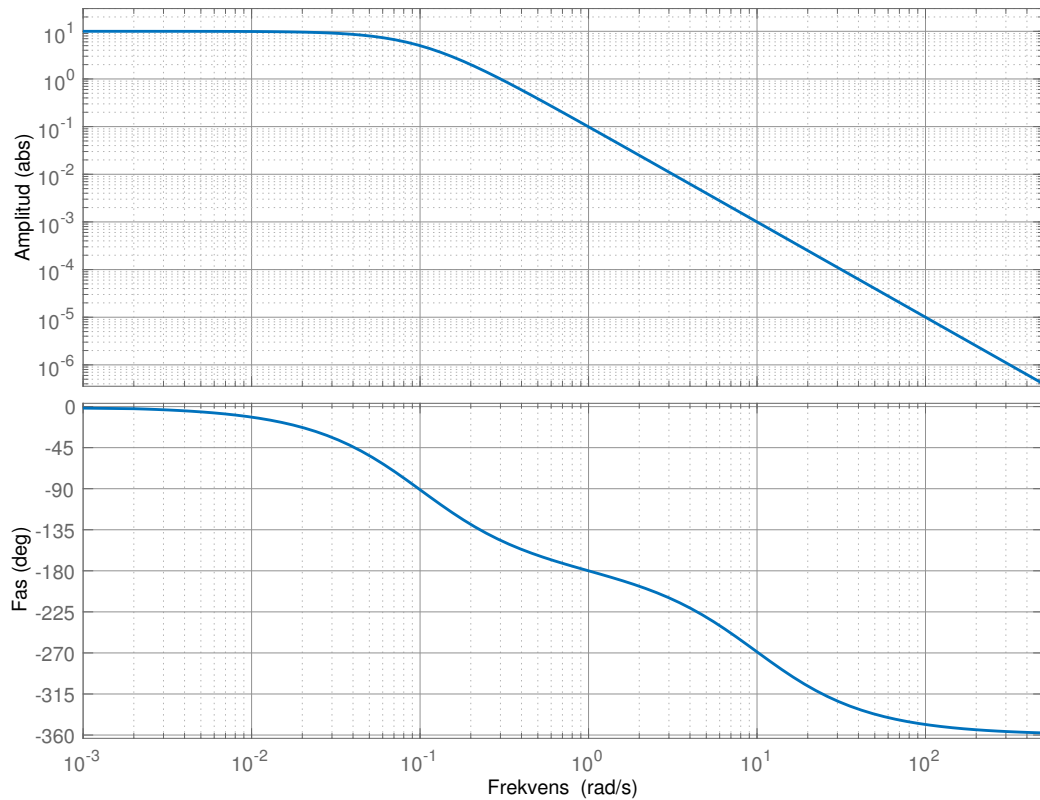
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{CL}(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(s + \frac{1}{T_i})}{s^2 + s(7 + K) + \frac{K}{T_i}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\frac{K}{T_i}}{\frac{K}{T_i}} = 1,$$

dvs, det stationära felet är noll. Slutvärdessatsen går att använda eftersom det slutna systemet är asymptotiskt stabilt för alla $K, T_i > 0$.

Svar: FALSKT. Det stationära felet är noll för båda värden på T_i .

- d. Om $T_i = \infty$ återfås en P-regulator. Då återfås även ett stationärt fel.

5. Betrakta ett system $G_P(s)$ vars Bodediagram är givet i figur 5. Systemet har inga poler i höger halvplan.
- a. Bestäm om vart och ett av påståendena nedan är sant eller falskt. Motivera dina svar väl.
- Systemet har en fasmarginal på minst 50° .
 - Om systemet återkopplas med en P-regulator med förstärkning 0.1 blir det slutna systemet instabilt.
 - Systemet har (exakt) två poler och ett nollställe. (3 p)
- b. Vi låter $Y(s) = G_P(s)U(s)$ och skickar in den lågfrekventa signalen $u(t) = 0.5 \sin(0.04t)$. Bestäm utsignalen $y(t)$ efter att transienten klingat ut. (3 p)
- Kom ihåg att kontrollera att de samband du eventuellt använder är tillämpliga.*



Figur 5: Bodediagram för uppgift 5 a och b.

Solution

- a. i. **Falskt.** Från Bodediagramet avläser vi skärfrekvensen $\omega_c = 0.3$ och från denna bestämmer vi systemets fasmarginal ur diagrammet som

$$\varphi_m \approx 30^\circ < 50^\circ.$$

- ii. **Falskt.** P-regulatorn multiplicerar därmed systemets överföringsfunktion med 0.1, vilket flyttar Bodediagrammets förstärkningsplot nedåt med förändrar inte fasplotten. Vi avläser att systemets förstärkning blir då 1 samt att fassen vid små frekvenser är 0° , alltså ligger punkten -1 till vänster om Nyquistkurvan då denna genomlöper $\omega \in [0, \infty)$. Då systemet inte har några poler i höger halvplan kan vi använda Nyquistkriteriet, och därmed är det slutna systemet inte instabilt.
- iii. **Falskt.** Detta kan ses om vi analyserar systemets fas för stora värden på ω . Vi har att antingen ligger nollstället i vänster eller höger halvplan, vilket ger asymptoterna

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(i\omega) = \begin{cases} -90^\circ & \text{om nollstället ligger i vänster halvplan,} \\ -270^\circ & \text{om nollstället ligger i höger halvplan.} \end{cases}$$

I vilket fall stämmer detta inte överens med fassen -360° som avläses från Bodediagrammet.

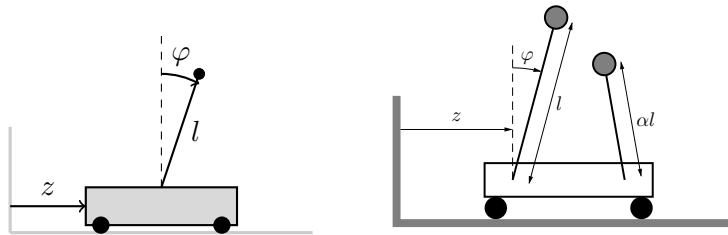
- b. Vi bestämmer först frekvenssvaret, efter att transienterna har dött ut, med frekvens $\omega = 0.04$:

$$|G(0.04i)| \sin(0.04t + \arg G(0.04i)) \approx 10 \sin(0.04t - \pi/4),$$

där fassen och beloppet avläses i diagrammet. Efter att transienterna har dött ut får vi därmed utsignalen

$$\begin{aligned} y(t) &= 0.5 \cdot 10 \sin(0.04t - \pi/4) \\ &= 5 \sin(0.04t - \pi/4). \end{aligned}$$

Beloppet är något mindre än 10, snarare 9, vid frekvensen $\omega = 0.04$ men för enkelhets skull har vi skrivit 10.



Figur 6: Vänster: Inverterad pendel på vagn för uppgift 6 **a-b**. Höger: Två inverterade pendlar på en vagn, för uppgift 6 **c-d**.

6. Detta problem kommer att handla om system med inverterade pendlar.

- a. En inverterad pendel som i figur 6 till vänster hålls upprätt genom att vagnen förs fram och tillbaka i sidled. Dynamiken ges av:

$$\ddot{z} \cos \varphi + \ddot{\varphi} l = g \sin \varphi,$$

där φ är vinkelavvikelsen, l pendelns längd till tyngdpunkten och g tyngdaccelerationen. Vagnens acceleration, som är vår styrsignal, ges av $u = \ddot{z}$.

Linjärisera systemet runt den stationära punkten där $\varphi = 0$. Du kan sätta $l = 1$ och $g = 10$. Skriv svaret på formen $\dot{x} = Ax + Bu$. (3 p)

- b. Är det linjäriserade systemet i a asymptotiskt stabilt? Motivera kort. (1 p)

- c. Vi har nu istället en vagn med två inverterade pendlar som i figur 6 till höger. Den linjäriserade dynamiken ges av

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{10}{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \\ -\frac{10}{\alpha} \end{bmatrix} u,$$

där x_1 är den vänstra pendelns vinkelavvikelse och x_3 är den högra pendelns vinkelavvikelse.

För vilka värden på α är systemet styrbart? ² (3 p)

- d. Tolka svaret i c. (2 p)

²Du kan ha nytta av dessa samband: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{10}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{\alpha} \end{bmatrix}$,

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{\alpha} \\ 0 & 0 & \frac{100}{\alpha^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Om det underlättar kan du även välja att bortse från minustecknen i B -matrisen då detta inte ändrar svaret utan bara byter riktning på styrsignalen.

Solution

- a. Välj tillstånden $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$ och styrsignalen $u = \ddot{z}$. Detta är en standard-uppgift så lösningen inkluderas inte.

Svar:
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u.$$

- b. Nej, det är instabilt, vilket är intuitivt eftersom det är en inverterad pendel. Vi kan även verifiera att den karakteristiska ekvationen blir $\det(sI - A) = \det \left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ -10 & s \end{bmatrix} \right) = s^2 - 10 = 0$. Karakteristiska polynomet uppfyller ej kraven på att alla poler är i vänster halvplan – vi ser att polerna ligger i $\pm\sqrt{10}$.
- c. Styrbarhetsmatrisen ges av $S = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$. Här blir det lite räkningar, som leder fram till:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 & -100 \\ -10 & 0 & -100 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{\alpha} & 0 & -\frac{100}{\alpha^2} \\ -\frac{10}{\alpha} & 0 & -\frac{100}{\alpha^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser omedelbart att kolonn 3 blir linjärt beroende av kolonn 1 om och endast om $\alpha = 1$ (eller -1, men negativa längder på staven är ej relevanta). Detsamma gäller för kolonn 4 och kolonn 2.

Svar: Systemet är styrbart för alla $\alpha \neq 1$ ($\alpha > 0$).

- d. Så länge pendlarna har olika längd har de något olika dynamik, vilket gör att man med hjälp av vagnens acceleration kan styra dem till vilka vinklar som helst (i teorin). Är de lika långa så går de ej att skilja ut från varann: de är identiska och deras rörelser följs åt. Startar de båda i origo kommer vi bara kunna styra dem till samma vinkel. Definitionen på styrbarhet i kompendiet avsnitt 8.2 är alltså inte uppfyllt.

7. Betrakta processen G_P vars Bodediagram visas i Figur 7.

a. Nisse försöker återkoppla processen med en fasretarderande länk

$$G_K(s) = \frac{s + 0.1}{s + 0.05},$$

men upptäcker då att systemet blir instabilt. Förklara varför detta sker! (2 p)

b. Bestäm istället en fasavancerande länk

$$G_R(s) = K_K N \frac{s + b}{s + bN}, \quad N > 1$$

sådan att kretsöverföringsfunktionens fasmarginal blir 25° samtidigt som dess skärfrekvens blir 2 rad/s. (4 p)

c. Nisse försöker nu även införa den fasretarderande länken från deluppgift a. Motivera varför kretsöverföringsfunktionen $G_O = G_K G_R G_P$ nu ger upphov till ett stabilt slutet system. (2 p)

(Du behöver inte ha löst deluppgift b. för att kunna lösa denna deluppgift.)

Solution

a. Från Bodediagrammet avläser vi skärfrekvensen $\omega_c = 1$ och fasmarginalen $\varphi_m = 0$. Vid fasretarderande kompensering får processen en negativ fasvridning som minskar fasmarginalen. Eftersom fasmarginalen redan är 0 blir fasmarginalen negativ och det slutna systemet blir instabilt.

b. Formelsamlingen ger sambandet mellan parametern N och den önskade fasökningen $\Delta\varphi_m \approx 25^\circ + 25^\circ = 50^\circ$, vilket ger $N = 7.5$ (obs att denna fasökning avläses vid 2 rad/s vilket är den nya önskade skärfrekvensen).

Vi beräknar parametern b genom sambandet

$$b = \frac{\omega_c}{\sqrt{N}} = \frac{2}{\sqrt{7.5}} \approx 0.73.$$

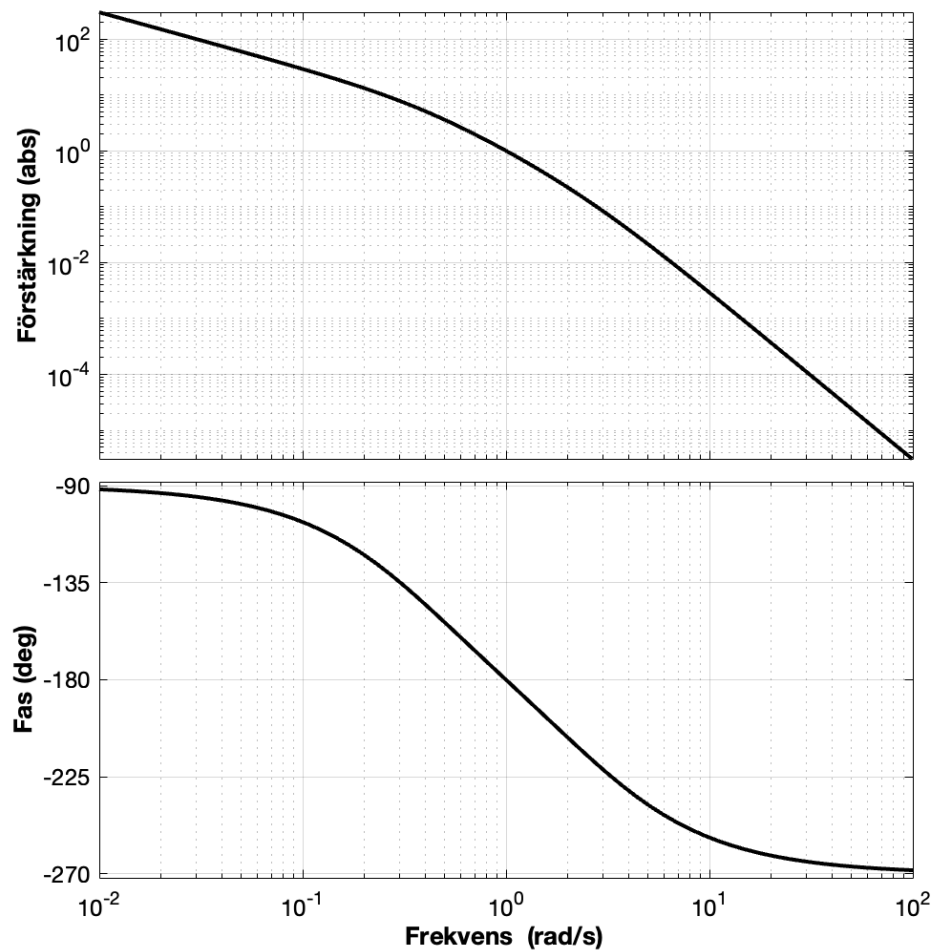
Vi bestämmer sedan K_K så att $\omega_c = 2$ verkligen blir skärfrekvensen. I Bodediagrammet ser vi att $|G(2i)| \approx 0.2$ och därmed får vi att

$$K_K = \frac{1}{|G(2i)|\sqrt{N}} \approx 1.83.$$

Slutligen får vi den fasavancerade länken

$$G_K = 13.7 \cdot \frac{s + 0.73}{s + 5.5}.$$

I tentan som användes vid skrivtillfället stod att fasmarginalen skulle vara 30° , vilket rättades till 25° muntligen. Användes 30° som specifikation blir $N = 11$.



Figur 7: Bodediagram för överföringsfunktionen G_P i uppgift 7

- c. Vi avläser från den fasretarderande länken att den kan skrivas på formen

$$G_K(s) = \frac{s + a}{s + a/M}$$

med brytfrekvensen $a = 0.1$ och förstärkningen $M = 2$. Eftersom skärfrekvensen från deluppgift **a.** var $\omega_c = 1$ följer detta tumregeln

$$a = 0.1\omega_c$$

vilket garanterar att fasmarginalen minskar med högst 6° . Detta gjorde det slutna systemet instabilt i deluppgift **a.**, men efter den fasvarancerade länken har ökat fasmarginalen med 25° uppstår inte detta problemet längre.