

Reglerteknik AK

Tentamen 13 januari 2024 kl 8-13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Preliminära betygsnivåer:

Betyg 3: lägst 12 poäng

4: lägst 17 poäng

5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

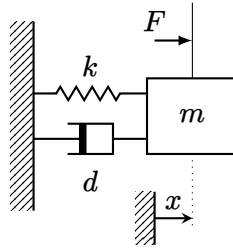
Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurshemsidan.

Anvisningar (OBS!)

Skriv enbart på ena sidan av varje blad (d.v.s. inte på fram- och baksida!).

Påbörja varje ny uppgift (1-6) på nytt blad. Deluppgifter (a,b,c,...) kan dock lösas på samma sida.

Lycka till!



Figur 1 Massa som påverkas av en extern kraft och som är kopplad till en vägg med en fjäder och en dämpare

1. En massa som är kopplad till en vägg genom en fjäder och en dämpare visas i figur 1. En extern kraft F kan appliceras på massan. Från Newtons andra lag fås följande differentialekvation för massans rörelse.

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = F,$$

där systemet startar från vila då $x = 0$. Vi kallar k för *fjäderkonstant* och d för *dämpningskonstant*.

- a. För $m = 1$ [kg], ta fram överföringsfunktionen från insignalen $F = u$ till positionen $x = y$. (1 p)
- b. För vilka värden på fjäderkonstanten $k \geq 0$ och dämpningskonstanten $d \geq 0$ är systemet asymptotiskt stabilt? (låt fortsatt $m = 1$) (1 p)
- c. För vilka värden på fjäderkonstanten $k \geq 0$ och dämpningskonstanten $d \geq 0$ är systemet *marginellt* stabilt? (låt fortsatt $m = 1$) (1 p)
- d. Skriv systemet på styrbar kanonsisk tillståndsform. (låt fortsatt $m = 1$) (1 p)

Solution

- a. Lapalacettransformering med $m = 1$ [kg] av differentialekvationen ger:

$$s^2X(s) + dsX(s) + kX(s) = (s^2 + ds + k)X(s) = U(s) \iff X(s) = \frac{1}{s^2 + ds + k}U(s),$$

där $X(s)$ är laplacetransformen av positionen $x(t)$ och $U(s)$ är laplacetransformen av insignalen.

Därmed fås överföringsfunktionen från insignal till utsignal position av

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + ds + k}.$$

- b. För asymptotisk stabilitet måste samtliga konstanter vara positiva i nämnarpolynomet av $G(s)$. Därmed fås asymptotisk stabilitet om $d > 0$ och $k > 0$ samtidigt.
- c. Marginell stabilitet får om en av d eller k är 0 samtidigt som den andra är positiv. Detta kan ses i polerna som ges av:

$$s = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - k}$$

Marginell stabilitet fås om en eller flera poler ligger på imaginära axeln och om de inte är dubbelpoler på imaginära axeln. Ifall $k = 0$ och $d > 0$ hamnar polerna i $-d$ och 0 . Om $k > 0$ och $d = 0$ hamnar polerna i $\pm i\sqrt{k}$. Ifall både k och d är 0 hamnar båda polerna i origo och systemet är instabilt.

- d. Identifiering av kontanterna på sidan 4 i formelsamlingen ger:

$$a_1 = d, \quad a_2 = k, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1$$

Därmed fås systemet på styrbar kanonisk form som

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} -d & -k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} z. \end{aligned}$$

På tentan stod det inte explicit att man skulle låta $m = 1$ även i uppgift d. Under tentan förtydligades det att man skulle låta $m = 1$. Ifall man inte gjorde det fick man en något svårare överföringsfunktion att ta fram matriser ur. Båda svaren gav poäng. Med godtyckligt m ges överföringsfunktionen av

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m}},$$

och då fås den styrbara kanoniska formen på

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} -d/m & -k/m \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1/m \end{bmatrix} z. \end{aligned}$$

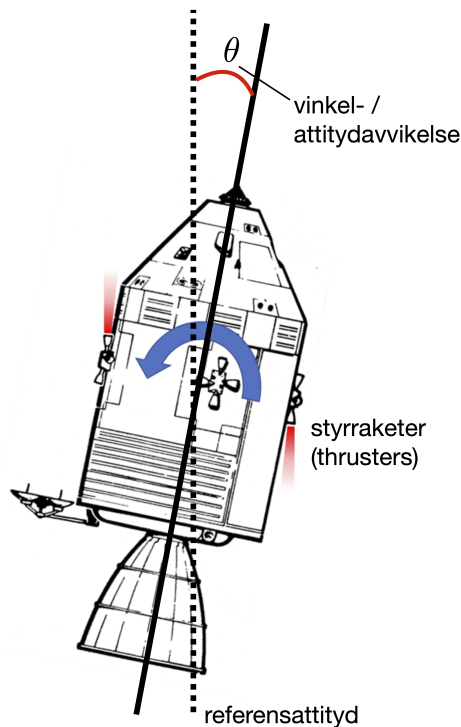
2. Ombord på rymdfarkoster finns hundratals reglersystem. Några av dem har till syfte att reglera farkostens attityd, d.v.s. dess riktning eller vinkel (i förhållande till en inertialram). Avvikelse i attityden är oönskade och kan ha flera orsaker, såsom påverkan från yttre krafter, rörelser i last eller bränsle, eller motorernas arbete.

Förenklat kan vi beskriva en sorts attitydregleringssystem på detta sätt: avvikelser i attityden mäts med gyroskop. För att motverka dem och rätta upp farkosten används styrraketer (eng. 'thrusters'). Se även illustrationen i figur 2.

- a. Betrakta attitydregleringssystemet, såsom det är beskrivet ovan, som ett regulatorproblem och föreslå vad som är
- mättsignal (alt. utsignal) y
 - styrsignal (alt. insignal) u
 - störsignal l

Motivera ditt svar.

(1 p)

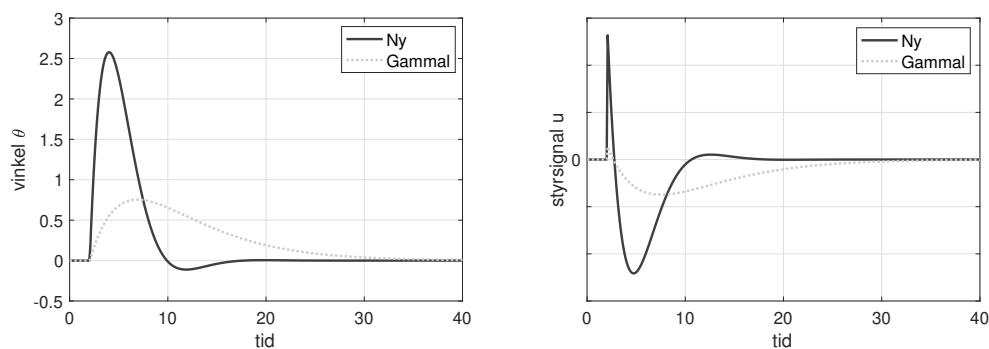


Figur 2 Illustration av ett attitydregleringssystem.

- b. En glad LTH-student har fått praktik på NASA och får jobba med att simulera attitydregleringssystemet ovan. Hen tycker det verkar ha dålig prestanda och använder sina reglerteknikkunskaper för att förbättra (?) det. Simuleringar av det gamla och nya systemet syns i figur 3.

Tycker du att studenten designat en bättre eller sämre regulator för rymdfarkosten? Resonera med hänvisning till den aktuella tillämpningen. (1 p)

2-3 meningar bör räcka.



Figur 3 Simulering av det förenklade attitydregleringssystemet då raketens utsätts för en plötslig yttre kraft. Till vänster: vinkelutslag/attityd avvikelse, till höger: motsvarande styrsignal. Enheterna är godtyckliga.

Solution

- a. i. y är *det vi vill styra*, dvs attityden/vinkeln i förhållande till referensramen; vinkelavvikelsen.

- ii. u är det vi styr med hjälp av, dvs pådraget i styrraketerna.
 - iii. l är störningar som vi behöver reglera bort, dvs yttre krafter, rörelser i last eller bränsle, eller motorernas arbete som får raketen att avvika från önskad attityd.
- b. Fördelen med den nya regulatören är att den är snabbare: störningen elimineras och raketen rätas upp ungefär dubbelt så fort. MEN, det är på bekostnad av en större absolut vinkelavvikelse under transienten (2,5 enheter istället för 0,75 enheter). Detta kan vara inom toleransområdet för raketen, men kan också vara en för stor vinkelavvikelse. Vidare är rörelsen betydligt häftigare med den nya regulatören, Den gamla som ger ett mjukare svar, är troligen mer angenäm för eventuella passagerare.

Tentakonstruktören anser att dock att det *bästa argumentet* för att hävda att den gamla regulatören är bättre fås genom att betrakta styrsignalen. Eftersom raketbränsle är oerhört dyrt är det väldigt onödigt att som med den nya regulatören först ha ett stort utslag åt ena hållet, och sedan ett stort utslag åt andra hållet. Det försiktigare svaret från den gamla regulatören torde vara bränslesparande.

3. Betrakta ett system vars Nyquistdiagram är givet i figur 4. Systemet har inga poler eller nollställen i höger halvplan. Bestäm om vart och ett av påståendena nedan är sant eller falskt. Motivera dina svar. Varje rätt svar med korrekt motivation ger 0.5 p

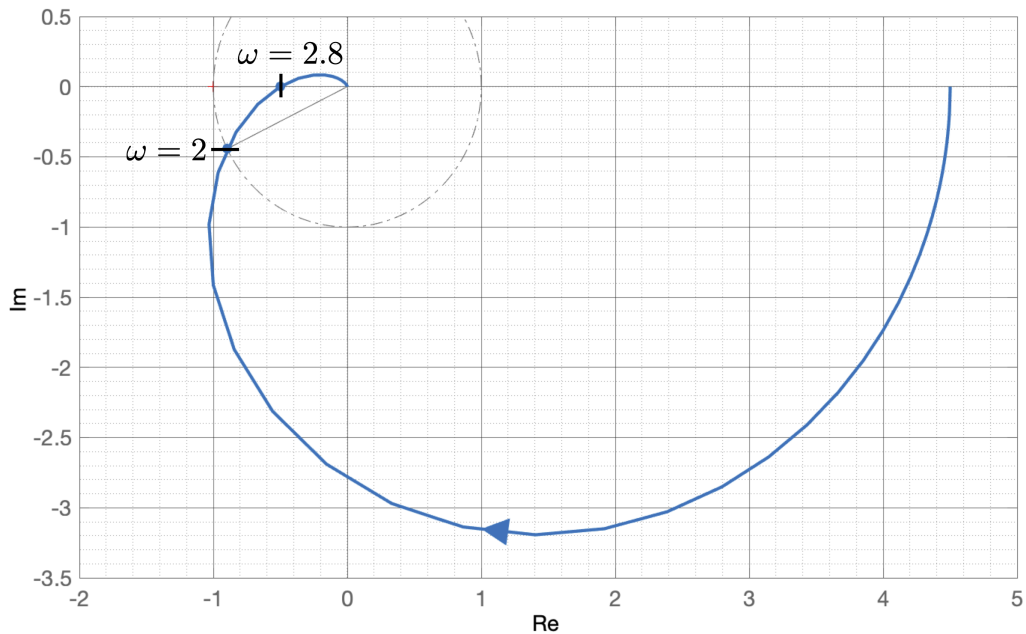
- i. Systemets amplitudmarginal är 0.5.
- ii. Systemets dödtidsmarginal är c:a 0.75 sekunder
- iii. Om systemet återkopplas med en P-regulator med $K = 1.5$ blir det slutna systemet asymptotiskt stabilt.
- iv. Om systemet återkopplas med en P-regulator med $K = 1.5$ förbättras dödtidsmarginalen (det vill säga, systemet klarar av en längre dödtid utan att bli instabilt).
- v. Om signalen $u(t) = \sin(2t)$ skickas in i systemet fås efter lång tid utsignalen $y(t) = 3 \sin(2t - 1)$.

(2.5 p)

Tips: $1 \text{ rad} \approx 57.2^\circ$.

Solution

- i. **Falskt.** Nyquistkurvan skär negativa rella axeln i punkten $-0.5 + 0i$, överföringsfunktionen kan förstärkas en faktor två utan att bryta Nyquistkriteriet, så amplitudmarginalen är 2. Alternativt direkt från definitionen fås $A_m = 1/|G_0(i\omega_0)| = 1/|G_0(2.8i)| = 1/0.5 = 2$.
- ii. **Falskt.** Dödtidsmarginalen ges direkt av $L_m = \varphi_m/\omega_c$. Från Nyquistdiagrammet är $\omega_c = 2 \text{ rad/s}$ och $\varphi_m \approx 0.5 \text{ rad}$ (ungefär 30°). Det ger en dödtidsmarginal på 0,25 s, en faktor 3 mindre än påståendet.
- iii. **Sant.** Om systemet återkopplas med en förstärkning på 1,5 så förstoras Nyquistkurvan en faktor 1,5 ut från origo. Punkten -1 skulle fortfarande befinna sig till vänster om Nyquistkurvan då ω går från 0 till ∞ , eftersom kurvan då korsar rella axeln vid $-0,75$. Enligt Nyquistkriteriet så blir slutna systemet asymptotiskt stabilt.



Figur 4 Nyquistdiagram för uppgift 3. I figuren är Nyquistkurvens skärningspunkt med enhetscirkeln och den reella axeln markerade, tillsammans med motsvarande frekvenser ω [rad/s].

- iv. **Falskt.** Förstärkningen från P-regulatorn påverkar ω_c och φ_m . Låt A_m vara amplitudmarginalen för systemet utan P-regulator. Notera att givna förstärkningen $1,5 < A_m$.

- Fasmarginalen φ_m minskar, punkten där Nyquistkurvan skär enhetscirkeln roterar i negativ riktning och når punkten -1 när förstärkningen är A_m .
- Skärfrekvensen ω_c ökar från 2 rad/s, då förstärkningen är 1, till 2,8 rad/s, då förstärkningen är A_m .

Dödtidsmarginalen ges av $L_m = \varphi_m / \omega_c$ och kommer minska eftersom täljaren minskar medan nämnaren ökar.

- v. **Falskt.** Insignalen är en harmonisk signal med vinkelfrekvens 2 rad/s, så efter att transienten försvunnit är utsignalen $y(t) = |G(2i)| \sin(2t + \arg G(2i))$. Det går direkt att utläsa förstärkningen $|G(2i)| = 1$ vid 2 rad/s som råkar vara skärfrekvensen. Påståendet påstår att förstärkningen ska vara 3 vilket inte stämmer.

4. Ett linjärt system som motsvarar en likströmsmotor kan beskrivas med följande tillståndsbeskrivning:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

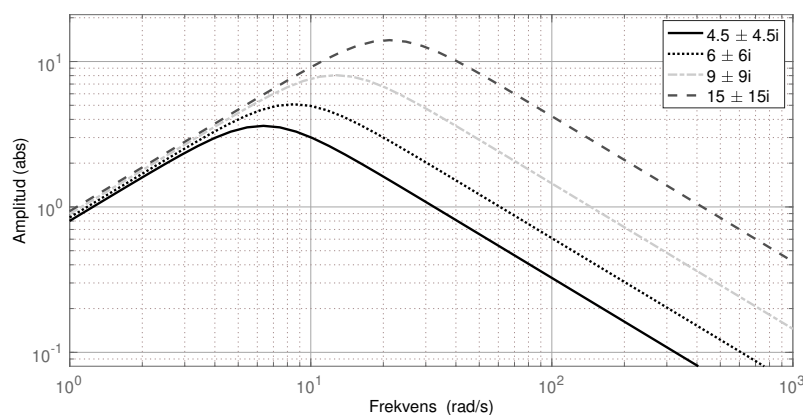
- a. Är systemet styrbart respektive observerbart? (1 p)
- b. Designa en tillståndsåterkoppling $u = k_r r - Kx$ som placerar polerna i $-3 \pm 3i$. Se samtidigt till att mätsignalen y överensstämmer med referenssignalen r stationärt. (2 p)

Anta nu att vi enbart har tillgång till mätsignalen y . Utifrån den behöver vi rekonstruera/skatta tillstånden för att kunna använda återkopplingen i b.

- c. Designa en observerare/ett Kalmanfilter som skattar tillstånden. Välj en polplacering så att tillståndsskattningen kan förväntas bli dubbelt så snabb som det tillståndsåterkopplade systemets dynamik (enligt en tumregel). (1.5 p)
- d. I c. valde vi en viss polplacering för observeraren/Kalmanfiltret. Skulle det vara möjligt att välja filtrets poler på ett godtyckligt sätt för detta system? Varför/ varför inte? (0.5 p)
- e. Tyvärr är även mätsignalen y svår att mäta på ett bra sätt och signalen drabbas av mätbrus, så att $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + n$. Vi är särskilt oroliga för mätbrus som kan modelleras som sinusvågor med frekvens runt 30 rad/s, det vill säga, $n(t) \approx \sin(30t)$.

Vi beräknar därför överföringsfunktionen från mätbruset n till skattningen $\hat{x}_2$ enligt $G_{n \rightarrow \hat{x}_2}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} [sI - (A - LC)]^{-1} L$ och ritar dess Bodediagram (amplitudkurvan) för några polplaceringar. Se figur 5.

Diskutera kortfattat med hjälp av detta vad som kan vara en lämplig placering av observerarens/Kalmanfiltrets poler. (1 p)



Figur 5 Bodediagram (amplitudkurva) för överföringsfunktionen $G_{n \rightarrow \hat{x}_2}(s)$ från mätbrus till skattningen av tillståndet x_2 , för fyra olika val av polplaceringar för observeraren/Kalmanfiltret.

Solution

- a. För detta problem behöver vi kolla på styrbarhetsmatrisen och observerbarhetsmatrisen.

Styrbarhet. Skapa matrisen $W_S = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, determinanten är skild från noll, därmed är kolonnerna linjärt oberoende och systemet är styrbart.

Observerbarhet. Skapa matrisen $W_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, determinanten är skild från noll, därmed är raderna linjärt oberoende och systemet är observerbart.

- b. Önskade karaktäristiska polynomet är $(s + 3 - 3i)(s + 3 + 3i) = s^2 + 6s + 18$. Slutna systemets karaktäristiska polynom är $\det(sI - A + BK) = s^2 + (1 + k_2)s + k_1$.

Jämförelse av termerna ger $k_1 = 18$ och $k_2 = 5$.

Slutna systemets överföringsfunktion ges av $G(s) = C(sI - A + BK)^{-1}Bk_r = \dots = \frac{k_r}{s^2 + 6s + 18}$. Systemet är asymptotiskt stabilt, slutvärdesteoremet ger stationära värdet från stegsvar som

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_r}{s^2 + 6s + 18} = \frac{k_r}{18}.$$

För att mätsignalen ska bli densamma som referenssignalen måste därmed $k_r = 18$.

Styrlagen ges av $u = 18r - 18x_1 - 5x_2$.

- c. För skattning dubbel så snabb som dynamiken, placera polerna dubbelt så långt från origo. Parametrисera karaktäristiska polynomet som $s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$ (ger $\omega = 3\sqrt{2}$ och $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$). Dubblera ω för att få karaktäristiska polynomet för observeraren: $s^2 + 12s + 72$ (polerna placeras alltså i $-6 \pm 6i$).

Det karakteristiska polynomet till observeraren ges av $\det(sI - A + LC) = s^2 + (l_1 + 1)s + (l_1 + l_2)$, vilket ger $l_1 = 11$ och $l_2 = 61$.

- d. Ja, detta är möjligt tack vare att systemet är observerbart.
- e. Vi noterar att en störsignal med frekvens runt 30 rad/s förstärks med en faktor 1 om filtrets poler är i $4.5 \pm 4.5i$, 2 om de är i $6 \pm 6i$, ännu mer om polerna ligger längre ut i VHP.

Det innebär alltså att systemet blir dubbelt så bruskänsligt om polerna ligger där vi föreslog i c, jämfört med om man nöjer sig med att lägga polerna i $4.5 \pm 4.5i$, som skulle göra tillståndsskattningen 50% snabbare än tillståndsåterkopplingen (detta är i det nedre spannet för tumregel om design av observerare). Det kan därför vara värt att kompromissa lite på snabbheten för att få en bättre kvalitet på skattningen. Transienten kommer att bli längre, men den kommer att motstå mätbruset bättre.

I verkligheten får man iterera designen av återkopplingen och Kalmanfiltret och testa sig fram för att göra designavvägningar av denna typ.

5. Johan och Max ska åka pulka i Sankt Hans backar. Det är Johans tur att åka medan Max knuffar på med kraften u .

Gräs sticker upp i snön, så friktionen är inte försumbar, och backens lutning gör att accelerationen varierar med pulkans position y . Enligt Max kan pulkans färd modelleras med differentialekvationen

$$m\ddot{y}(t) = -\alpha\dot{y}(t) + \beta \frac{1}{1+y(t)^4} + u(t)$$

där m , α och β är konstanter. Johan vill analysera pulkans beteende och behöver därför din hjälp att ta fram en linjär modell.

- a. Inför tillstånden $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ och skriv systemet på olinjär tillståndsform. (1 p)

- b. Max påstår att alla stationära punkter ges av

$$(x_1^0, x_2^0, u^0) = \left(\xi, 0, \frac{-\beta}{1+\xi^4} \right)$$

för godtyckligt värde på ξ . Verifiera att detta stämmer. Det vill säga, visa att detta utgör systemets stationära punkter. (1 p)

- c. Låt $m = 100$, $\alpha = 10$, $\beta = 1$ och linjärisera systemet kring den stationära punkt där $x_1^0 = 1$. Skriv systemet på linjär tillståndsform. (2 p)

Solution

- a. Med införda tillstånd $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$ samt omskrivning så tidsderivering är av högst ordning 1:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\alpha}{m}x_2 + \frac{\beta}{m} \frac{1}{1+x_1^4} + \frac{u}{m} \end{aligned}$$

- b. I stationära punkter så är tidsderivatorna noll, vilket ger

$$\begin{aligned} 0 &= x_2^0 \\ 0 &= -\frac{\alpha}{m}x_2^0 + \frac{\beta}{m} \frac{1}{1+(x_1^0)^4} + \frac{u^0}{m}. \end{aligned}$$

Den andra ekvationen kan skrivas om till

$$\begin{aligned} 0 &= x_2^0 \\ u^0 &= -\frac{\beta}{1+(x_1^0)^4}. \end{aligned}$$

Tre storheter men bara två ekvationer, parametrисera med $\xi = x_1^0$ så erhålles

$$(x_1^0, x_2^0, u^0) = \left(\xi, 0, -\frac{\beta}{1+\xi^4} \right)$$

c. Olinjära funktionerna är

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, u) &= x_2 \\ f_2(x_1, x_2, u) &= -\frac{\alpha}{m}x_2 + \frac{\beta}{m} \frac{1}{1+x_1^4} + \frac{u}{m}. \end{aligned}$$

Beräkna partiella derivator:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 1 & \frac{\partial f_1}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -\frac{\beta}{m} \frac{4x_1^3}{(1+x_1^4)^2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= -\frac{\alpha}{m} & \frac{\partial f_2}{\partial u} &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Via uttrycket från föregående deluppgift, introducera variablerna

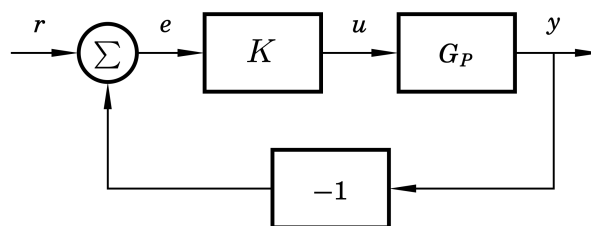
$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - x_1^0 \\ \Delta x_2 &= x_2 \\ \Delta u &= u + \frac{\beta}{1+(x_1^0)^4}. \end{aligned}$$

Insättning av $m = 100$, $\alpha = 10$, $\beta = 1$ och $x_1^0 = 1$ samt evaluering av partiella derivatorna i den stationära punkten ger linjära tillståndsformen

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{100} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{100} \end{bmatrix} \Delta u$$

där

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - 1 \\ \Delta x_2 &= x_2 \\ \Delta u &= u + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



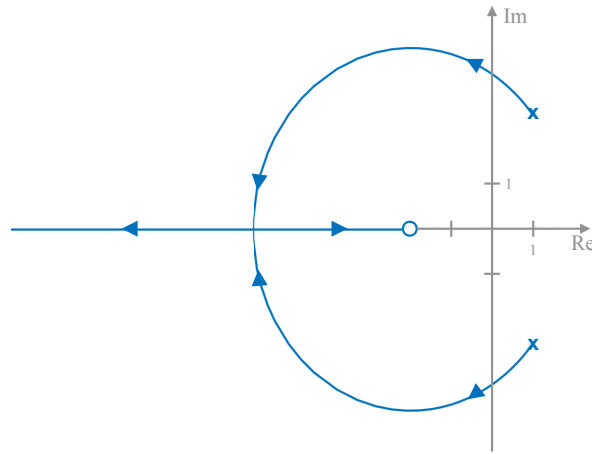
Figur 6 Reglerkrets för uppgift 6.

6. En process G_P återkopplas med en P-regulator enligt figur 6. För att ta reda på hur det slutna systemets poler påverkas av valet av P-regulator har man ritat en rotort som visas i figur 7.

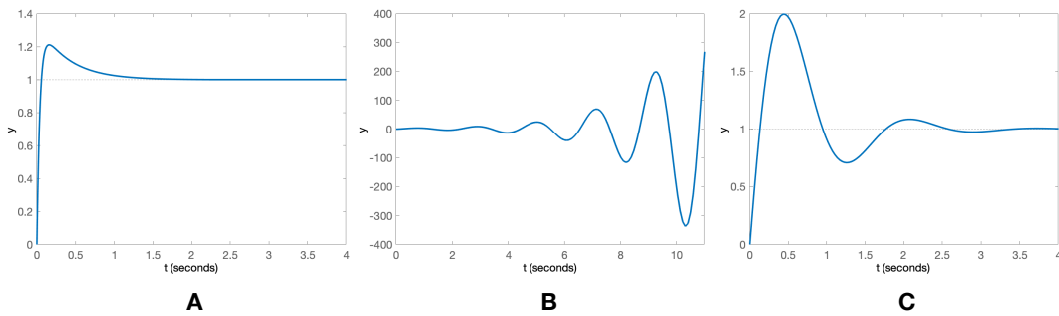
I figur 8 syns tre stegsvar för det slutna systemet för tre olika värden på K . Para ihop respektive stegsvar **A–C** med respektive förstärkning

- i) $K = 1$
- ii) $K = 5$
- iii) $K = 30$

(1.5 p)



Figur 7 Rotort för uppgift 6.



Figur 8 Stegsvär för uppgift 6.

Solution

Rotorten börjar i startpunkterna i höger halvplan och slutar i en asymptot längs negativa reella axeln och i en slutpunkt (det öppna systemets nollställe) i c:a -1.5.

För små K är systemet instabilt. Eftersom bara ett stegsvar är instabilt, B, så måste det motsvara $K = 1$.

Då K ökar är polerna komplexa och vi förväntar oss ett oscillerande stegsvar som i C. Ju större K , desto större relativ dämpning hos polerna och desto mindre svängningar.

För stora K är polerna reella, så vi förväntar oss inga svängningar. Dock kan nollstället som ligger nära origo, jämfört med polerna, orsaka extra översläng såsom i A.

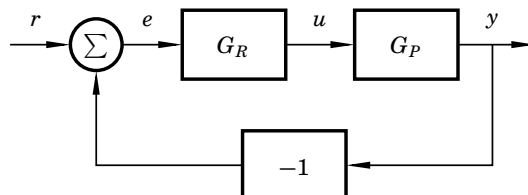
Vi kan alltså sluta oss till att att $K = 5$ motsvarar C, och $K = 30$ motsvarar A.

- i) $K = 1$, B
- ii) $K = 5$, C
- iii) $K = 30$, A

7. En process kan beskrivas med överföringsfunktionen

$$G_P(s) = \frac{1 - 0.1s}{(10s + 1)^2(0.1s + 1)}.$$

Vi vill att systemet ska följa referensvärdesändringar väl och ska därför återkoppla systemet enligt figur 9 och designa en lämplig regulator.



Figur 9 Återkopplat system i uppgift 7.

Vi provar först en P-regulator $G_R(s) = K$. Det slutna systemet är stabilt och fungerar väl upp till förstärkningen $K = 10$, därefter blir det för stora svängningar i utsignalen. Vi önskar dock ett ännu snabbare system.

- a. Designa en kompenseringslänk $G_K^1(s)$ som ökar snabbheten ytterligare en faktor 3, utan att försämrast fasmarginalen, jämfört med då endast P-regulatorn $G_R(s) = K = 10$ används.

Till din hjälp har du Bode-diagrammet för $G_O(s) = 10G_P(s)$ som visas i figur 10. (2.5 p)

- b. För att följa referensvärdesändringar väl krävs också att det stationära felet är litet. För detta syfte har man designat en ytterligare kompenseringslänk, så att det nya öppna systemet blir

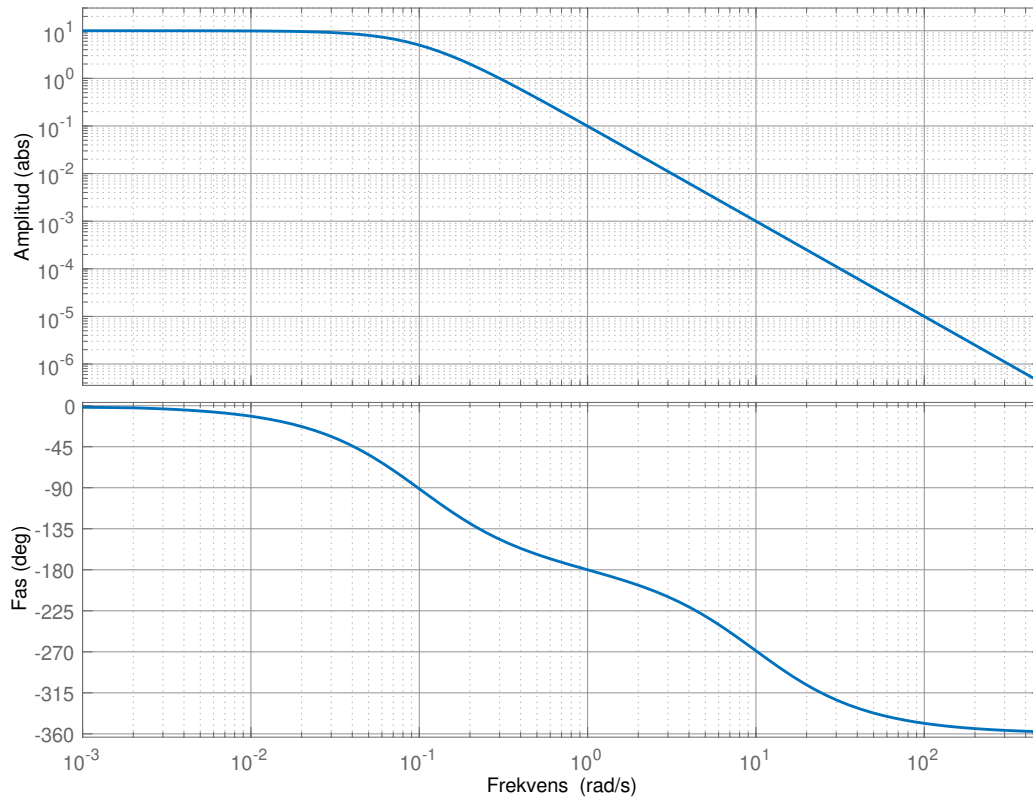
$$G_O^{ny}(s) = 10G_K^1(s)G_K^2(s)G_P(s).$$

Enligt specifikationen ska det stationära felet vid ett steg i referenssignalen vara mindre än 1%.

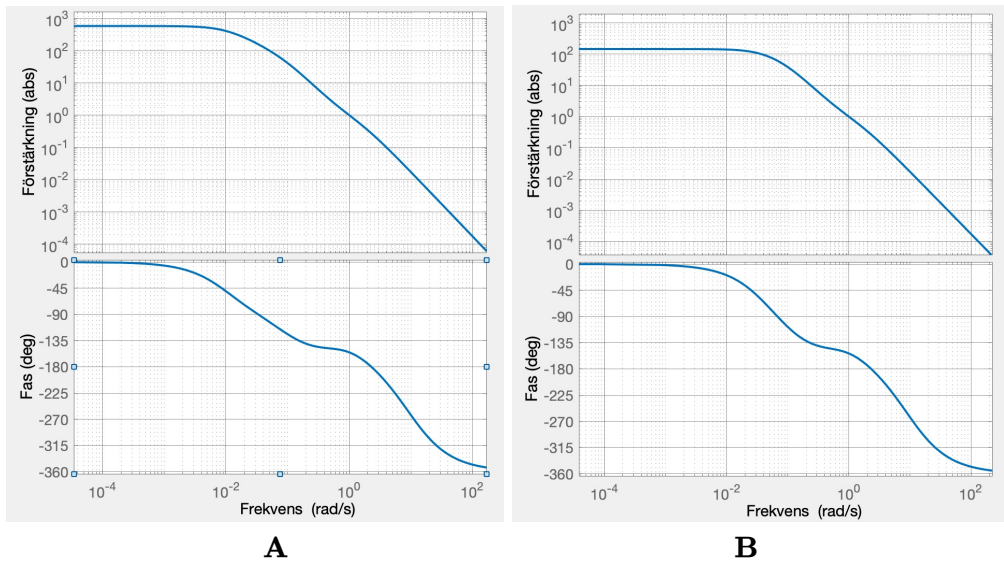
Man gör två försök att designa $G_K^2(s)$ och de resulterande Bodediagramen för det nya $G_O^{ny}(s)$ syns i figur 11. Är det något av systemen **A** respektive **B** (eller båda?) som uppfyller specifikationen? (1.5 p)

- c. Eftersom det är ett servoproblem man är intresserad av skulle man också vilja att systemet kan följa en konstant ökande referenssignal, d.v.s., en ramp. Om regulatorn som gav det öppna systemet **A** i figur 11 används, hur stort blir det stationära felet då referenssignalen är en rampsignal $r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$? (1 p)

Solution



Figur 10 Bodediagram för $G_O(s) = 10G_P(s)$ i uppgift 7.



Figur 11 Bodediagram för $G_O^{ny}(s) = 10G_K^1(s)G_K^2(s)G_P(s)$ i uppgift 7-b,c för två alternativa **A** respektive **B** på kompenseringslänken $G_K^2(s)$.

a. Denna uppgift löses genom att designa en fasavanceande länk.

$$G_K^1(s) = K_K \frac{1 + s/b}{1 + s/(bN)}$$

Måttet på snabbhet är skärfrekvens ω_c . Avläsning i bodediagrammet ger att skärfrekvensen till det gamla öppna systemet $G_O(s) = 10G_P(s)$ är 0.3 rad/s.

Om snabbheten ska öka en faktor 3 bör den nya snabbheten bli $\omega_c^{ny} = 0.9$ rad/s.

Vid den gamla skärfrekvensen är fasmarginalen 33.4° . Vid den nya önskade skärfterkvensen är fasmarginalen 0° . Därmed måste fasen öka minst 33.4° med länken. För detta väljs $N = 4$ i länken. Faskurvans topp ska ligga på ω_c^{ny} , därmed fås

$$\omega_c^{ny} = b\sqrt{N} \iff b = \omega_c^{ny}/\sqrt{N} = 0.9/\sqrt{4} = 0.45$$

Till slut ska K_K bestämmas. Detta görs genom att lösa ekvationen för att förstärkningen av det öppna systemet ska vara 1. Avläsning i bodediagrammet ger att $|G_O(i\omega_c^{ny})| = 0.1$

$$\begin{aligned} 1 &= |G_O^{ny}(i\omega_c^{ny})| = |G_K^1(i\omega_c^{ny})G_O(i\omega_c^{ny})| = |G_K^1(i\omega_c^{ny})| * |G_O(i\omega_c^{ny})| \\ &= K_K\sqrt{N} * 0.1 \iff K_K = 10/\sqrt{4} = 5 \end{aligned}$$

Därmed fås den fasavancerande kompenseringenslänken som

$$G_K^1(s) = 5 \frac{1 + s/0.45}{1 + s/(1.8)} = 20 \frac{s + 0.45}{s + 1.8}.$$

- b. Med de nya kompenseringenslänkarna blir överföringsfunktionen från referenssignal till fel

$$G_{er}(s) = \frac{1}{1 + G_O^{ny}(s)}.$$

Detta kan fås genom blockschemaräkning. Om referenssignalen är ett steg med höjd 1 får felet när tiden går mot oändligheten som:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_O^{ny}(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_O^{ny}(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_O^{ny}(s)}.$$

Vi kan se i bodediagrammet att både system **A** och **B** får mot ett positivt reellt tal över 100, eftersom fasen får mot 0 för låga frekvenser och amplitudkurvan är över 10^2 .

För att uppfylla specifikationen måste

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| < 0.01 \iff \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{1}{1 + G_O^{ny}(s)} \right| < 0.01$$

Då det gäller att $Im(G_O(0)) = 0$ och $Re(G_O(0)) > 100$ för både **A** och **B** existerar gränsvärdet och specifikationen kommer vara uppfylld för både systemet i **A** och **B**.

- c. Vid en rampändring som referenssignal kommer felet gå mot oändligheten. Detta gäller eftersom vi inte har någon integrator i processen eller regulatorn (kompenseringenslänkar inkluderat). Därmed får man ett stationärt fel för ett steg och oändligt stort fel rampreferens. Mer diskussion om detta finns på sidorna 62-64 i föreläsningssanteckningarna.

Man kan också se det ifall man försöker applicera slutvärdsesteoremet likt i b.
 då får man kvar en $1/s$ enligt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_O^{ny}(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_O^{ny}(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_O^{ny}(s)} \frac{1}{s}.$$

Då $G_O^{ny}(s)$ går mot ett begränsat reellt tal existerar inte gränsvärdet och felet
 går därmed mot oändligheten.