



LUNDS
UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 23 oktober 2023 kl 14-19

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng

Betyg 4: lägst 17 poäng

Betyg 5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

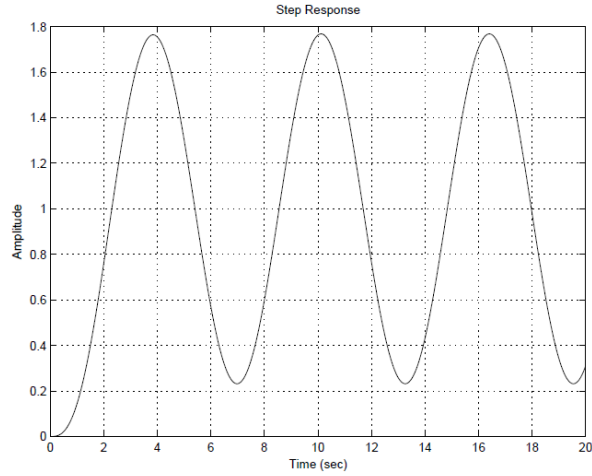
Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglertekniksamt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Facit kommer att tillgängligt via Canvas. Tidpunkt och lokal för tenta-visning meddelas via Canvas.

LYCKA TILL!

1. En PID regulator skall designas för en okänd process. Genom att återkoppla systemet med en proportionell regulator med $K = 0.6$ får man stegsvaret i figur 1. Använd Ziegler-Nichols frekvensmetod för att designa en PID regulator. (2 p)



Figur 1: Stegsvär för återkopplad process med $k = 0.6$ i Problem 1.

Solution

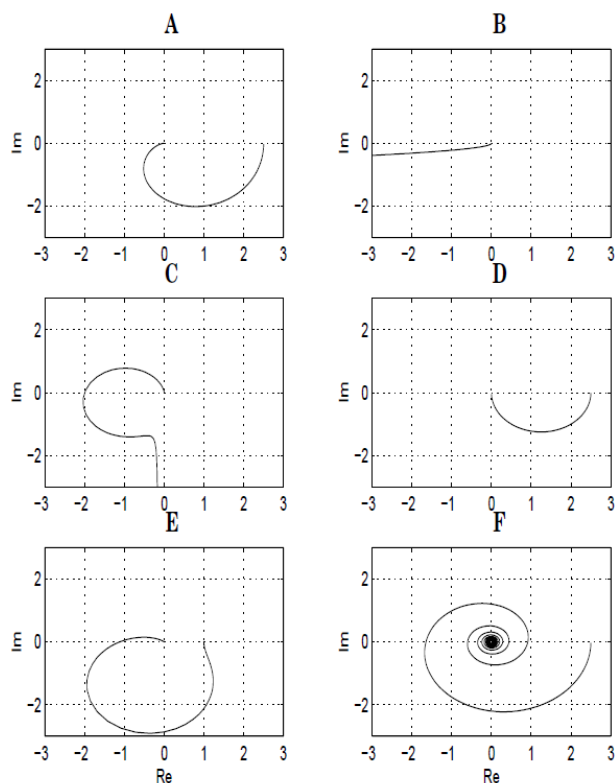
Periodtiden kan avläsas ur grafen och blir $T_0 \approx 6$. Dessutom blir $K_0 = 0.6$. Enligt Ziegler-Nichols frekvensmetod fås:

$$K = 0.6K_0 = 0.36$$

$$T_i = T_0/2 = 3$$

$$T_d = T_0/8 = 0.75$$

2. Sex Nyquistkurvor visas i figur 2. Kombinera dessa med motsvarande överföringsfunktioner nedan. Fullständig motivering krävs. (Tips: Tänk i Bode-diagram termer) (3 p)



Figur 2: Nyquistkurvor för Problem 2.

$$G_1(s) = \frac{5}{s+2}$$

$$G_4(s) = \frac{s+10}{2s^2}$$

$$G_2(s) = \frac{5}{s^2+2s+2}$$

$$G_5(s) = \frac{5}{s+2}e^{-s}$$

$$G_3(s) = \frac{0.2}{s(s^2+0.2s+0.5)}$$

$$G_6(s) = \frac{s+5}{10(s+1)(s^2+0.2s+0.5)}$$

Solution

$G_1(s)$ är ett första ordningens system, dvs Nyquistkurvan ligger i fjärde kvadranten och har statiska förstärkningen 2.5. Den enda kurva som motsvarar detta är D, dvs $G_1(s) \rightarrow D$

$G_2(s)$ är ett andra ordningens system med statiska förstärkningen 2.5. Kurvan ska komma från 2.5 och börja i fjärde kvadranten för att därefter gå över i tredje kvadranten och närma sig origo längs den negativa reella axeln när $\omega \rightarrow \infty$. Den enda kurva som motsvarar detta är A, dvs $G_2(s) \rightarrow A$.

$G_3(s)$ är ett tredje ordningens system med en integrator pol. För små ω kommer Nyquistkurvan längs med den negativa imaginära axeln (fas = -90°). Den enda kurva som gör detta är C, dvs $G_3(s) \rightarrow C$.

$G_4(s)$ är ett andra ordningens system med två integratorer. För små ω kommer Nyquistkurvan längs med den negativa reella axeln (fas = -180°). Den enda kurva som gör detta är B, dvs $G_4(s) \rightarrow B$.

$G_5(s)$ innehåller en tidsfördröjning vilket medför att Nyquistkurvan ska spiralisera sig mot origo, dvs $G_5(s) \rightarrow F$.

$G_6(s)$ har en reell pol, två komplexkonjugerade poler och ett reellt nollställe. Fasen ska gå från 0° mot -180° . Fasen kan eventuellt temporärt vara mindre än -180° . Detta motsvarar precis kurva E, dvs $G_6(s) \rightarrow E$.

3.

- a. Antag att du använder en PID regulator på standardform, dvs

$$U(s) = K(E(s) + \frac{1}{T_I}s E(s) + T_D s E(s))$$

för att reglera nivån i den undre tanken i Lab 2. Antag vidare att reglerloopen är i stationäritet utan några störningar och utan att styrsignal har slagit i några begränsningar. Vilken eller vilka av följande delar av regulatorn är det som bidrar till styrsignalen $u(t)$: P-delen, I-delen, D-delen eller någon kombination av dessa? (1 p)

- b. Antag istället att du använder en regulator med börvärdesviktning i P-delen, dvs P-delen är $K(bR(s) - Y(s))$, och att $b \neq 1$. Under samma förutsättningar, vilken eller vilka av termerna är det nu som bidrar till styrsignalen. (1 p)

Solution

- a. Stationäritet innebär att samtliga signaler är konstanta, inklusive referenssignalen. Detta i kombination med att vi har integralverkan i regulatorn innebär att det stationära felet är 0 och att derivatan av felet också är 0. Det innebär att både P-delen och D-delen är 0 och att den enda term som bidrar till styrsignalen är I-delen.
- b. Med samma resonemang så ser man att när $b \neq 1$ så ges styrsignalen av en kombination av P-delen och I-delen.

4. Given följande tillståndsbeskrivning

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- a. Bestäm en styrlag

$$u = k_r r - Kx$$

för systemet så att polerna i det slutna systemet placeras i -11 och den stationära förstärkningen är 1 mellan r och y . (2 p)

- b. Bestäm ett Kalman-filter

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

för systemet så att observatörens poler hamnar vid -19. (1 p)

Solution

- a. Om $u = k_r r - Kx$ så blir systemet:

$$\dot{x} = Ax + B(k_r r - Kx) = (A - BK)x + Bk_r r$$

K bör väljas så att egenvärdena för $(A - BK)$ är på -11. Egenvärdena för $(A - BK)$ beräknas genom att lösa den karakteristiska ekvationen.

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BK) &= \det \begin{pmatrix} s + 2 + 2k_1 & 2k_2 \\ -2 & s + 3 \end{pmatrix} = (s + 2 + 2k_1)(s + 3) + 4k_2 = \\ &= s^2 + (5 + 2k_1)s + 6 + 6k_1 + 4k_2 = 0 \end{aligned}$$

Om de begärda egenvärdena ska placeras vid -11 ska den karakteristiska ekvationen vara lika med

$$\begin{aligned} (s + 11)^2 &= s^2 + 22s + 121 \\ &= s^2 + (5 + 2k_1)s + 6 + 6k_1 + 4k_2 = s^2 + 22s + 121 \end{aligned}$$

Detta ger två ekvationer

$$5 + 2k_1 = 22$$

$$6 + 6k_1 + 4k_2 = 121$$

att lösa detta ekvationssystem ger $k_1 = 8,5$ och $k_2 = 16$.

k_r beräknas genom att konstruera överföringsfunktionen mellan r och y och välja k_r så att den statiska förstärkningen för denna överföringsfunktion är 1. Detta görs genom att Laplace transformerar systemet.

$$sX = (A - BK)X + Bk_r R \rightarrow X = (sI - A + BK)^{-1} Bk_r R$$

$$Y = CX \rightarrow C(sI - A + BK)^{-1} Bk_r R$$

Överföringsfunktionen från R till Y är

$$G(s) = C(sI - A + BK)^{-1} Bk_r$$

Den statiska förstärkningen bör 1 vilket betyder att

$$G(0) = C(-A + BK)^{-1} Bk_r = 1$$

$$k_r = \frac{1}{C(-A + BK)^{-1} B}$$

För att hitta k_r bör man beräkna $C(-A + BK)^{-1} B$ och ta inversen av det.

$$C(-A + BK)^{-1} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 32 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{121}$$

$$k_r = \frac{121}{4} = 30.25$$

Styrlagen är

$$u = 30.25r - \begin{pmatrix} 8.5 & 16 \end{pmatrix} x$$

- b. Kalmanfiltrets egenvärden beräknas genom att beräkna egenvärdena för $(A - LC)$. Detta görs genom att lösa den karakteristiska ekvationen.

$$\det(sI - A + LC) = \det \begin{pmatrix} s+2 & l_1 \\ -2 & s+3+l_2 \end{pmatrix} = (s+2)(s+3+l_2) + 2l_1 =$$

$$s^2 + (5+l_2)s + 6 + 2l_2 + 2l_1 = 0$$

Om de begärda egenvärdena ska placeras vid -19 ska den karakteristiska ekvationen vara lika med

$$(s+19)^2 = s^2 + 38s + 361$$

$$s^2 + (5+l_2)s + 6 + 2l_2 + 2l_1 = s^2 + 38s + 361$$

Detta ger två ekvationer

$$5 + l_2 = 38$$

$$6 + 2l_2 + 2l_1 = 361$$

att lösa detta ekvationssystem ger $l_1 = 144.5$ och $l_2 = 33$.

$$L = \begin{pmatrix} 114.5 \\ 33 \end{pmatrix}$$

5. Givet systemet

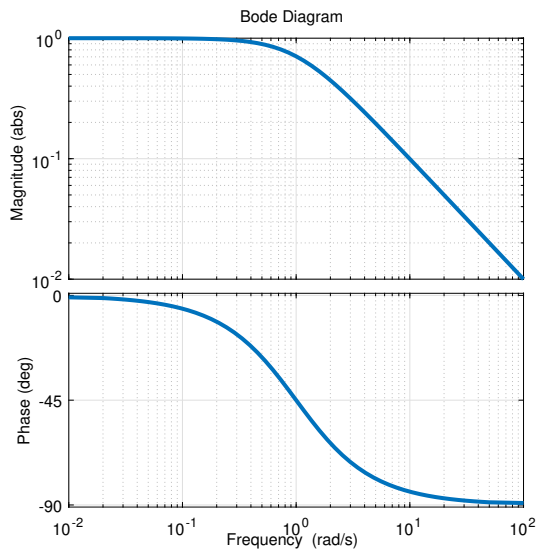
$$\frac{\ddot{y}}{10} = -y - \frac{11\dot{y}}{10} + u$$

- a. Skriv systemet som en överföringsfunktion. (0.5 p)
- b. Faktorisera överföringsfunktionen så att den har följande form. (1 p)

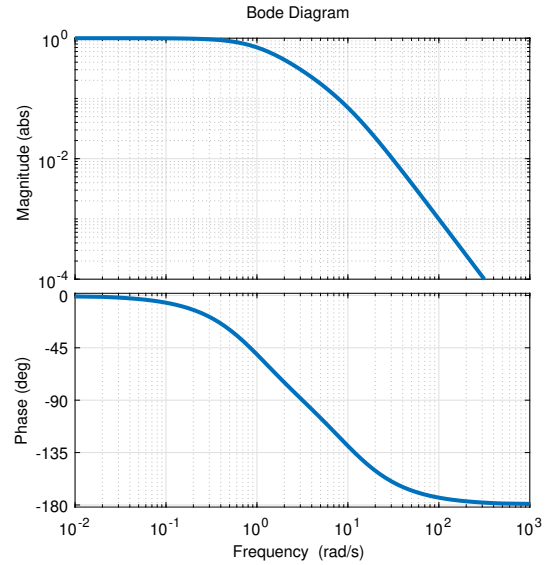
$$G(s) = \frac{c}{(as+1)(bs+1)}$$

- c. Matcha överföringsfunktionen med rätt Bode-diagram [A-D] i figur 3. (1 p)

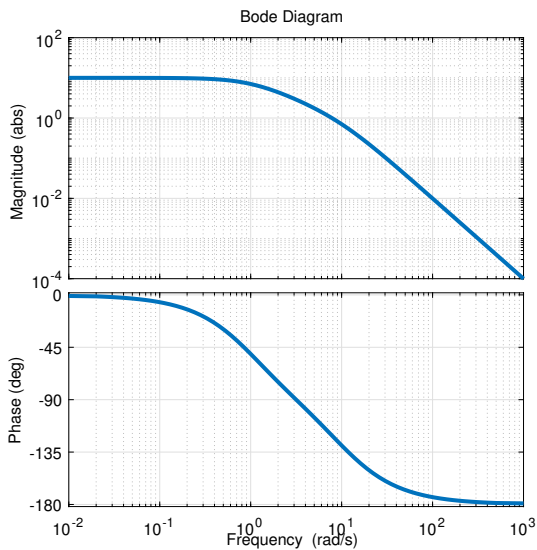
1. **INFO:** För full poäng måste du motivera ditt svar.



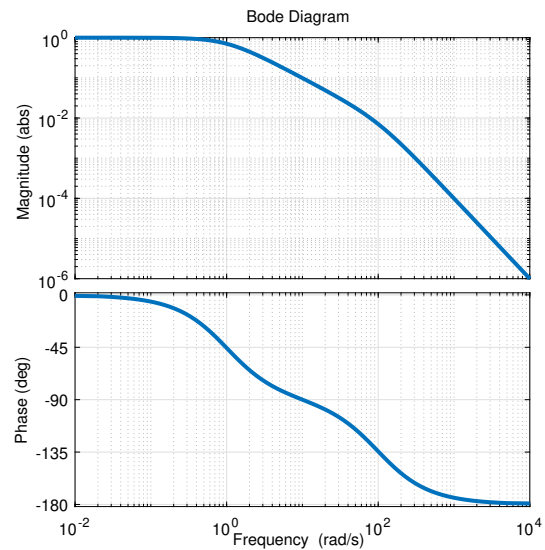
A



B



C



D

Figur 3: Bode diagram för Problem 4.c.

d. Vad blir den stationära utsignalen om insignalen är $u = 3 \sin(0.05t) + 2 \sin(100t)$. (1.5 p)

- INFO:** Både att utföra beräkningarna och att använda Bode-diagrammet ger full poäng. Välj den metod du föredrar.
- INFO:** Om du inte har lyckats hitta/faktorisera överföringsfunktionen eller hittat rätt Bode-diagram, använd följande överföringsfunktion istället. Observera att detta inte är svaret man får för det ursprungliga problemet, dvs du kan inte lösa problemet med hjälp av Bode-diagrammen.

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{11} + 1\right)(s + 1)}$$

3. **TIPS** Använd linjäritetsegenskapen för en överföringsfunktion.

Solution

- a. 1. Laplace transformera $\frac{\ddot{y}}{10} = -y - \frac{11\dot{y}}{10} + u$

$$\frac{s^2 Y}{10} = -Y - \frac{11sY}{10} + U$$

2. Flytta över Y till VL och bryt ut Y.

$$\left(\frac{s^2}{10} + 1 + \frac{11s}{10}\right) Y = U$$

3. Dividera.

$$Y = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{10} + 1 + \frac{11s}{10}\right)} U$$
$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{10} + \frac{11s}{10} + 1\right)} = \frac{10}{s^2 + 11s + 10}$$

- b. Om vi faktorerisar nämnarpolynomet $s^2 + 11s + 10$, dvs löser motsvarande andragradsekvation får vi

$$s_{1,2} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 10},$$

dvs $s = -10$ och $s = -1$. Detta betyder att

$$G(s) = \frac{10}{(s+10)(s+1)} = \frac{1}{\left(\frac{s}{10} + 1\right)(s+1)},$$

dvs $c = 1$, $a = 0.1$, och $b = 1$.

- c. Faskurvan ska gå från 0° till -180° , dvs diagram A är uteslutet. Förstärkningen vid låga frekvenser är 1, dvs diagram C är uteslutet. Amplitudkurvan ska ha två brytfrekvenser en vid $\omega = 1$ rad/s och en vid $\omega = 10$ rad/s. Diagram D förefaller att ha två brytfrekvenser men dessa ligger vid $\omega = 1$ rad/s och $\omega = 100$ rad/s. Det enda som återstår är Bode-diagram B.
- d. 1. Med tanke på att överföringsfunktionen är linjär så kan man titta på varje insignal för sig och sen addera deras utsignal.
2. Om $u = 3 \sin(0.05t)$ så vet vi att $G(s)$ kan approximeras som 1. Med tanke på att

$$\frac{1}{\left(\frac{i0.05}{10} + 1\right)} \approx 1$$

$$\frac{1}{(i0.05 + 1)} \approx 1$$

Det vill säga att förstärkningen är 1 och fasvridningen blir 0 så utsignalen är $3 \sin(0.05t)$. Detta kan också ses från Bode-diagrammet.

3. Om $u = 2 \sin(100t)$

$$|G(iw)| = \left| \frac{1}{(\frac{iw}{10} + 1)(iw + 1)} \right|$$

$$|G(i100)| = \left| \frac{1}{(i10 + 1)(i100 + 1)} \right| = \frac{1}{\sqrt{10^2 + 1}\sqrt{100^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{101}\sqrt{10001}} \approx 0.001$$

$$\begin{aligned} \arg(G(i100)) &= \arg\left(\frac{1}{(i10 + 1)(i100 + 1)}\right) = \arg\left(\frac{1}{110i - 999}\right) \\ &= \arg\left(\frac{-999 - 110i}{110^2 + 999^2}\right) = \arctan\left(\frac{110}{999}\right) - \pi = -3.03 \text{ rad} = -174^\circ \end{aligned}$$

4. Utsignalen blir $0.002 \sin(100t - 3.03)$. Detta kan också ses från Bode-diagrammet
5. Den slutliga utsignalen blir

$$y = 3 \sin(0.05t) + 0.002 \sin(100t - 3.03)$$

ALTERNATIVT SVAR:

- Med tanke på att överföringsfunktionen är linjär så kan man titta på varje insignal för sig och sen addera deras utsignal.
- Om $u = 3 \sin(0.05t)$ så vet vi att $G(s)$ kan approximeras som 1. Med tanke på att

$$\frac{1}{(\frac{i0.05}{11} + 1)} \approx 1$$

$$\frac{1}{(i0.05 + 1)} \approx 1$$

Det vill säga att försärkningen är 1 och fasvridningen blir 0 så utsignalen är $3 \sin(0.05t)$.

3. Om $u = 2 \sin(5t)$

$$|G(iw)| = \left| \frac{1}{(\frac{iw}{11} + 1)(iw + 1)} \right|$$

$$|G(i100)| = \left| \frac{1}{(\frac{i100}{11} + 1)(i100 + 1)} \right| = \frac{1}{\sqrt{\frac{100^2}{11^2} + 1}\sqrt{100^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{83.6}\sqrt{10001}} \approx 0.001$$

$$\begin{aligned} \arg(G(i100)) &= \arg\left(\frac{1}{(\frac{i100}{11} + 1)(i100 + 1)}\right) = \arg\left(\frac{1}{109i - 908}\right) \\ &= \arg\left(\frac{-908 - 109i}{109^2 + 908^2}\right) = \arctan\left(\frac{109}{908}\right) - \pi = -3.02 \text{ rad} = -173^\circ \end{aligned}$$

4. Utsignalen blir $0.002 \sin(100t - 3.02)$

5. Den slutliga utsignalen blir

$$y = 3 \sin(0.05t) + 0.002 \sin(100t - 3.02)$$

6. Betrakta följande linjära system på tillståndsform.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

a. Beräkna överföringsfunktionen, $G(s)$, för systemet. (1 p)

b. Förklara varför du får det resultat som du har fått. (1 p)

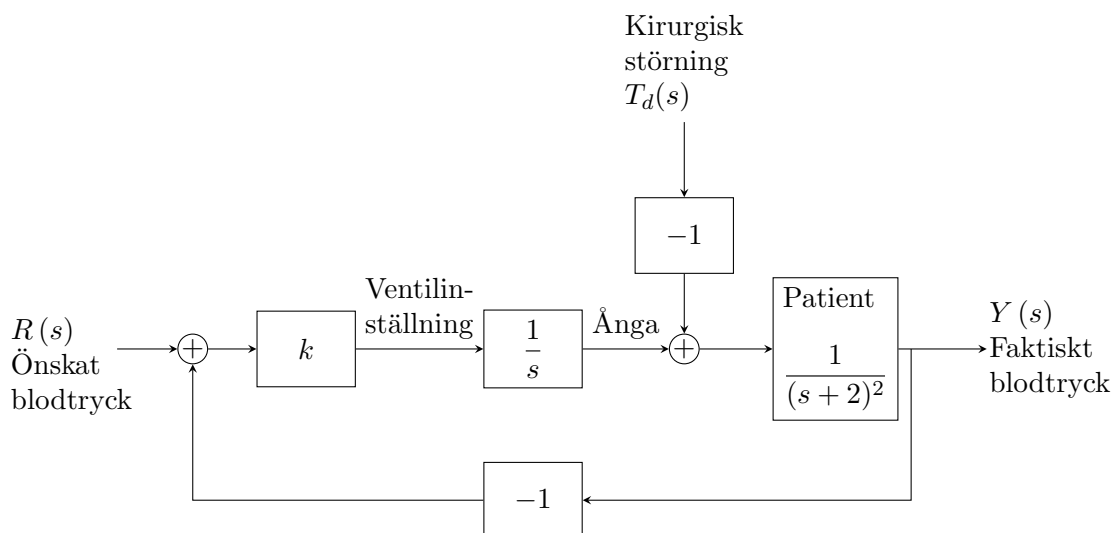
Solution

a.

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}}{(s+1)(s-2)} \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{0}{(s+1)(s-2)} = 0 \end{aligned}$$

b. Eftersom A-matrisen är diagonal ser man direkt att x_1 inte är styrbart och att x_2 inte är observerbart. Det betyder att varken x_1 eller x_2 syns i överföringsfunktionen.

7. Ett system som reglerar artärtrycket under anestesi har designats och testats. Nivån på artärtrycket antas motsvara anestesi djupet under kirurgi. En blockdiagram av systemet visas i figur 4, där påverkan av kirurgin representeras av störningen $T_d(s)$.



Figur 4: Blockdiagram för Problem 7.

- a. Bestäm överföringsfunktionen från $T_d(s)$ till $Y(s)$. (1 p)
- b. För vilka värden av k är systemet asymptotiskt stabilt? (1 p)
- c. Bestäm det stationära felet på grund av en enhetsstegstörning. (1 p)
- d. Bestäm överföringsfunktionen från insignalen $R(s)$ till $Y(s)$. (1 p)
- e. Bestäm det stationära felet för en rampinsignal. (1 p)
- f. Vad är intervallet av k för vilket vi får ett stationärt fel mindre än 0.25 på grund av rampinsignaler. (1 p)

Solution

- a. Överföringsfunktionen från störningen $T_d(s)$ till mätsignalen $Y(s)$ hittas genom att sätta $R(s) = 0$. Vi får

$$\frac{Y(s)}{T_d(s)} = \frac{-s}{s^3 + 4s^2 + 4s + k}.$$

- b. Det karakteristiska polynomet är av tredje ordningen och har formen $D(s) = s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$. För asymptotisk stabilitet kräver vi att a_0, a_1, a_2 är positiv och även $a_2a_1 > a_0$. Detta översätts till $k > 0$ och $k < 16$ och därför bör k vara i intervallet $0 < k < 16$.
- c. Antag att k ligger i intervallet $0 < k < 16$, så skulle vi kunna använda slutvärdesteoremet för att erhålla stationära felet. Att ha en enhetsstegstörning betyder $T_d(s) = \frac{1}{s}$. Vi får

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(0 + \frac{s}{s^3 + 4s^2 + 4s + k} \right) \frac{1}{s} = 0.$$

Observera att i detta fall är den önskade utsignalen till en enhetsstegstörning 0.

- d. Den slutna överföringsfunktionen är

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^3 + 4s^2 + 4s + k}.$$

- e. Stationära felet när $R(s) = \frac{1}{s^2}$ räknas med hjälp av slutvärdesteoremet.

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} s (1 - G(s)) \frac{1}{s^2} = \frac{4}{k}.$$

Detta resultat erhålls genom att tillämpa L'Hôpitals regel (genom att differentiera täljaren och nämnaren en gång och sedan ta gränsen).

- f. Om vi vill att felet ska vara mindre än 0.25, översätts detta till $e_s = \frac{4}{k} < 0.25 \Leftrightarrow k > 16$. Genom att titta på villkoret för stabilitet så ser man att det inte finns några värden på k så att denna felreduktionsnivå uppnås.

8. En process, betecknad som P, regleras av en regulator, betecknad som C. Fasmarginalen för hela systemet är acceptabel, men systemets hastighet är för låg. Din uppgift är att designa en fasavancerande kompenseringslänk som fördubblar skärfrekvensen, w_c , samtidigt som fasmarginalen, φ_m , bibehålls oförändrad.

Systemet kan beskrivas enligt följande:

$$P = \frac{2}{s+1} \exp^{-0.25s} \quad , \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3 \text{ p})$$

Solution

Den ursprungliga skärfrekvensen, betecknad som w_c , beräknas med hjälp av följande ekvation:

$$|P(iw_c)C(iw_c)| = \left| \frac{2}{\sqrt{2}(iw_c + 1)} \exp^{-0.25iw_c} \right| = 1$$

Eftersom $\left| \frac{2}{\sqrt{2}} \right| = \frac{2}{\sqrt{2}}$ och $|\exp^{-0.25iw_c}| = 1$, resulterar det i:

$$\frac{2}{\sqrt{2}|(iw_c + 1)|} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{w_c^2 + 1}} = 1$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{w_c^2 + 1}$$

$$2 = w_c^2 + 1$$

$$w_c = 1$$

Den ursprungliga fasmarginalen, betecknad som φ_m , beräknas med hjälp av argumentet för $P(iw_c)C(iw_c)$ enligt följande ekvation:

$$\begin{aligned} \arg(P(iw_c)C(iw_c)) &= \arg\left(\frac{2}{\sqrt{2}(iw_c + 1)} \exp^{-0.25iw_c}\right) = \\ \arg\left(\frac{2}{\sqrt{2}(iw_c + 1)}\right) + \arg(\exp^{-0.25iw_c}) &= \arg\left(\frac{2 - 2iw_c}{\sqrt{2}(w_c^2 + 1)}\right) - 0.25w_c \\ &= \arctan(-w_c) - 0.25w_c \end{aligned}$$

Införandet av skärfrekvensen ger:

$$\arctan(-1) - 0.25 = -1.035 \text{ rad} \approx -60^\circ$$

$$\varphi_m = 180 - 60 = 120^\circ$$

För att lösa problemet.

- Bestäm den nya skärfrekvensen, betecknad som w_c^n , och den nya fasmarginalen, betecknad som φ_m^n .

$$w_c^n = 2w_c = 2$$

$$\varphi_m^n = \varphi_m$$

2. Beräkna hur mycket fas som finns vid den nya skärfrekvensen, beräkna hur mycket fasen bör ökas för att uppfylla specifikationerna som anges i steg 1 och välj ett N som ger denna fasökning.
- (a) Fasen vid den nya skärfrekvensen, betecknad som φ , beräknas med exakt samma metod som tidigare visats:

$$\arctan(-w_c^n) - 0.25w_c^n = \arctan(-2) - 0.5 = -1.61 \approx -92^\circ$$

$$\varphi = 180 - 92 = 88^\circ$$

- (b) Den önskade fasökningen, betecknad som $\Delta\varphi$, beräknas enligt:

$$\Delta\varphi = \varphi_m^n - \varphi = 120 - 88 = 32^\circ$$

- (c) N väljs för att öka fasen. I det här fallet bör fasen ökas med cirka 30° , vilket, med hjälp av formelsamlingen, ger oss ett N på 3.
3. Välj b så att toppen av den nyss skapade fasökningen sammanfaller med den nya skärfrekvensen:

$$w_c^n = b\sqrt{N} \rightarrow b = \frac{w_c^n}{\sqrt{N}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.15$$

4. Välj K_k så att $|P(iw_c^n)C(iw_c^n)G_k(iw_c^n)| = 1$, där G_k är fasavancerande kompenseringsslänk och $|G_k(iw_c^n)| = K_k\sqrt{N}$.

$$|P(iw_c^n)C(iw_c^n)G_k(iw_c^n)| = |P(iw_c^n)C(iw_c^n)|K_k\sqrt{N} = 1$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{(w_c^n)^2 + 1}}K_k\sqrt{N} = 1$$

$$K_k = \sqrt{\frac{(w_c^n)^2 + 1}{2N}} \approx 0.91$$

Så den slutliga kompenseringsslänken ser ut som följer:

$$G_k(s) = K_k N \frac{s + b}{s + bN} = 2.73 \frac{s + 1.15}{s + 3.46}$$