

Reglerteknik AK

Tentamen 13 april 2023 kl 8-13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Betyg 3: lägst 12 poäng
4: lägst 17 poäng
5: lägst 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik- samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurs- hemsidan.

Anvisningar (OBS!)

Skriv enbart på ena sidan av varje blad (d.v.s. inte på fram- och baksida).

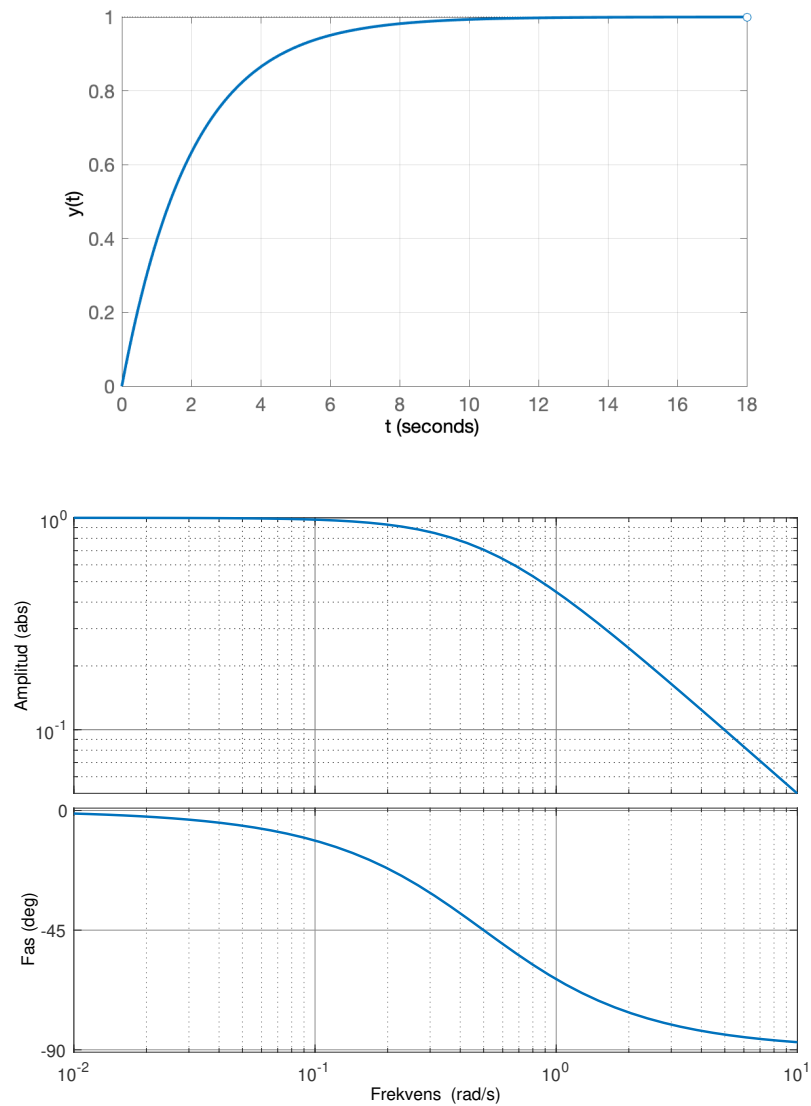
Enbart en uppgift (1-6) på varje sida. Deluppgifter (a,b,c,...) kan lösas på samma sida.

Lycka till!

1. En process kan beskrivas med följande differentialekvation:

$$a\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

- a. Bestäm processens överföringsfunktion $G_P(s)$. (1 p)
- b. Bestäm systemets poler och nollställen (i termer av a), om de finns. För vilka värden på a är systemet asymptotiskt stabilt? (1.5 p)
- c. För att identifiera a utför man några enkla experiment: stegsvar och frekvenssvar. I figur 1 visas det stegsvar och Bodediagram som fås från experimenten. Bestäm a utifrån något av diagrammen. Motivera ditt svar. (1 p)



Figur 1: Stegsvär och Bodediagram för uppgift 1.

Solution

- a. Laplacetransformation ger:

$$\begin{aligned}asY + Y &= U \\ \Leftrightarrow Y &= \underbrace{\frac{1}{1+as}}_{=G_P(s)} U\end{aligned}$$

- b. Nollställena till G_P ges av täljarens nollställena. Inga sådana finns.

Poler ges av nämnarens nollställena. **Det finns en pol i $s = -1/a$.**

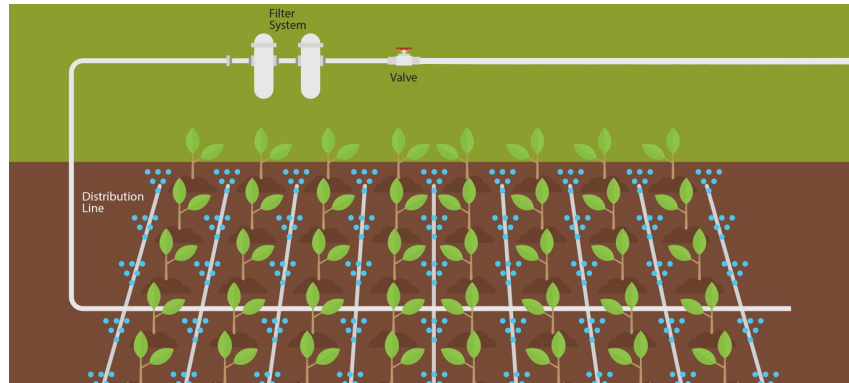
Systemet är asymptotiskt stabilt då alla poler har strikt negativ realdel. **D.v.s. asymptotiskt stabilt då $a > 0$.**

- c. Systemets tidskonstant är a , och motsvarar den tid det tar att nå 63% av slutvärdet i ett stegsvar. Se föreläsningsanteckningarna Exempel 3.1. Avläsning i stegsvaret i figur 1 ger att $a = 2$.

Bodediagrammet har det typiska utseendet för en process av första ordningen, se formelsamling s.9. Vi kan se att brytpunkten är vid frekvensen $\omega = 0.5$, och därför är $a = 2$.

Svar: $a = 2$.

2. Ett automatiskt bevattningssystem mäter kontinuerligt fukthalten i jorden och tillför vatten med hjälp av en ställbar ventil. Målet är att fukthalten ska ligga på rätt nivå för grödorna, trots variationer i väder och vind, där t. ex. solsken orsakar avdunstning och regn tillför vatten.



Figur 2: Illustration av ett bevattningssystem.

- a. Betrakta bevattningssystemet, såsom det är beskrivet ovan, som ett regulatorproblem och föreslå vad som är
- mätsignal (alt. utsignal) y
 - styrsignal (alt. insignal) u
 - laststörning (alt. störsignal) l

Motivera ditt svar.

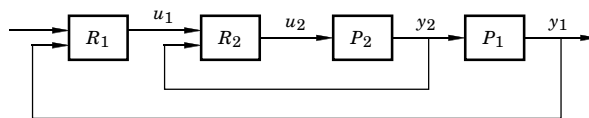
(1 p)

- b. Lantbrukaren som äger bevattningssystemet märker att det presterar sämre vissa dagar då även grannen använder mycket vatten. Hon identifierar att det beror på att trycket i vattenledningen då sjunker och att ventilinställningen behöver anpassas för att få önskad mängd vatten till fälten. Eftersom det tar för lång tid att styra ventilen via återkoppling från fuktmätningen, inser lantbrukaren att hon bör använda en alternativ regulatorstruktur.

Hon förstår att regulatorstrukturen i figur 3 är lämpligast.

- Vad kallas regulatorstrukturen?
- Vad motsvarar signalerna y_1 och y_2 i detta fall?

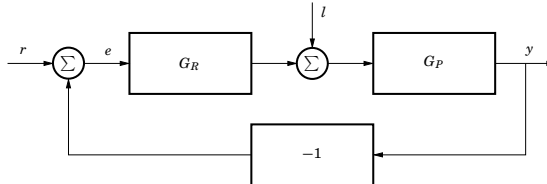
(1 p)



Figur 3: Bevattningssystemets nya regulatorstruktur i uppgift 2-b.

Solution

- a.
- i. mätsignal (alt. utsignal) y : det vi vill styra. I detta fall fukthalten i jorden.
 - ii. styrsignal (alt. insignal) u : det vi styr med hjälp av. I detta fall det tillförda vattnet, alternativt ventilinställningen.
 - iii. laststörning (alt. störsignal) l : det som stör processen och gör den oförutsägbar och skapar behovet av reglering: variationer i väder och vind, t ex avdunstning och regn .

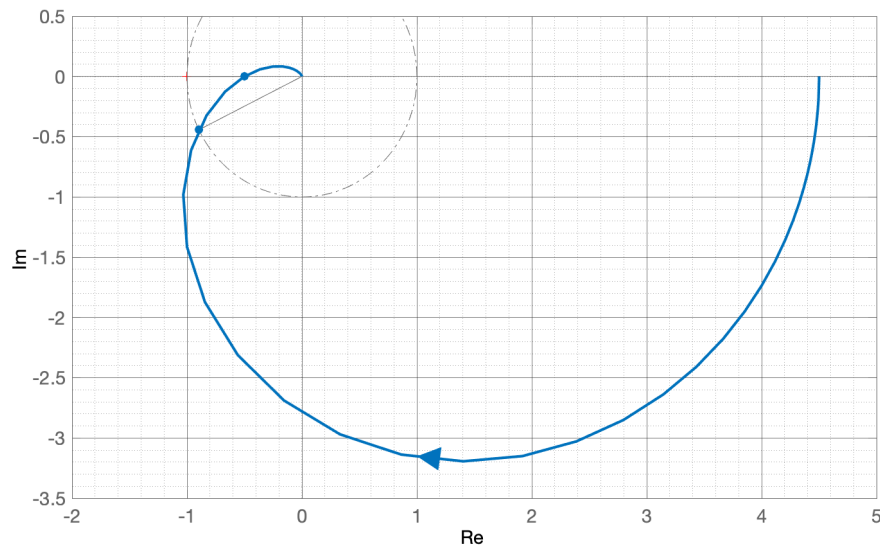


- b.
- i. kaskadreglering, kaskadkoppling
 - ii. y_1 är fortsatt det vi vill styra, d.v.s. fukthalten i jorden, medan y_2 är det vi önskar styra med hjälp av, d.v.s. vattentillförseln.
 P_2 motsvarar ventildynamiken (som störs av tryckvariationer pga grannen), och P_1 är själva fältet som bevattnas (som störs av väder och vind). I det enklare blockdiagrammet ovan motsvarar G_P kombinationen av P_1 och P_2 . Nu regleras istället vattentillförseln till önskat styrsignalvärde u_1 med hjälp av den inre kretsen, medan problemet vi behandlade i deluppgift a beskrivs av den yttre kretsen.

3. Betrakta ett system vars Nyquistdiagram är givet i figur 4. Bestäm om vart och ett av påståendena nedan är sant eller falskt. Motivera dina svar väl. Varje rätt svar med korrekt motivation ger 0.5 p.

- Systemets amplitudmarginal är 2.
- Om systemet återkopplas med en P-regulator med $K = 3$ blir det slutna systemet instabilt.
- Systemet har (exakt) tre poler och ett nollställe.
- Systemet har dödtid, d.v.s. en tidsfördröjning.
- Systemet har oändlig dödtidsmarginal

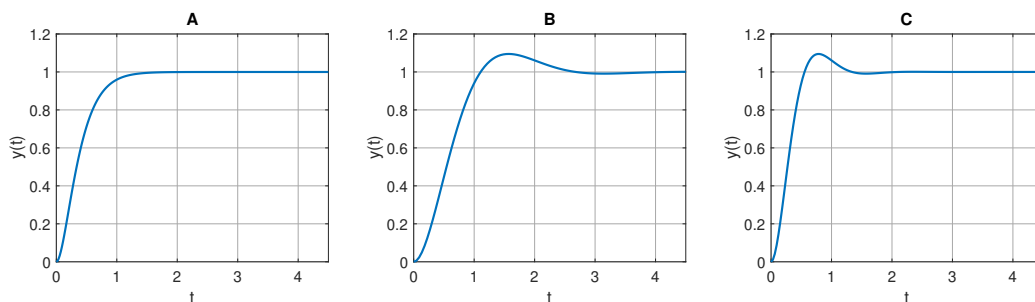
(2.5 p)



Figur 4: Nyquistdiagram för uppgift 3. I figuren är Nyquistkurvans skärningspunkt med enhetscirkeln och den reella axeln markerade.

Solution

- Systemets amplitudmarginal är 2. **Sant.** Nyquistkurvan skär den reella axeln vid 0.5. Förstärkning med $A_m = 2$ innebär att denna punkt hamnar i -1.
- Om systemet återkopplas med en P-regulator med $K = 3$ blir det slutna systemet instabilt. **Sant**, eftersom $K = 3 > A_m$ och kurvan då får -1 till höger om sig.
- Systemet har (exakt) tre poler och ett nollställe. **Falskt.** Detta syns på argumentet då $\omega \rightarrow \infty$ som är -270° . Varje pol bidrar med -90° och varje nollställe med $+90^\circ$ om det är i VHP och -90° om det är i HHP. Oavsett kan inte tre poler och ett nollställe summera till -270° .
- Systemet har dödtid, d.v.s. en tidsfördröjning. **Falskt.** En tidsfördröjning skulle få Nyquistdiagrammet att snurra in mot origo, eftersom $\arg(e^{-i\omega L}) = -\omega L$
- Systemet har oändlig dödtidsmarginal. **Falskt.** Dödtidsmarginalen ges av $L_m = \varphi_m / \omega_c$ och är ändlig (eftersom $\omega_c > 0$).



Figur 5: Stegsvär för uppgift 4-b. Notera att ett stegsvär blir över.

4. Ett linjärt system kan beskrivas med följande tillståndsbeskrivning:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0] x\end{aligned}\quad (1)$$

- a. Är systemet styrbart? (1 p)
- b. Man ska göra en tillståndsåterkoppling på systemet och överväger två olika polplaceringar:

Polplacering 1 $s_{1,2} = -3 \pm 4i$,

Polplacering 2 $s_{1,2} = -5$

Para ihop rätt polplacering med rätt stegsvär i figur 5. Motivera ditt svar och notera att ett stegsvär blir över. (1 p)

- c. Designa en tillståndsåterkoppling $u = k_r r - Kx$ som placerar polerna enligt polplacering 1 eller 2 (välj själv!). Se även till att den statiska förstärkningen från referensvärde r till utsignal y är 1. (2 p)

- d. Man är orolig för att inte kunna mäta båda tillstånden, och frågar sig om det är möjligt att skatta (d.v.s. rekonstruera) tillståndsvektorn genom att enbart studera y och u och använda ett Kalmanfilter.

Är detta möjligt för systemet (1)? Motivera ditt svar noga. (1 p)

- e. Systemet (1) ovan har erhållits genom en linjärisering av ett olinjärt system runt en stationär punkt. Man upptäcker att det olinjära systemet ändrats och det behövs en ny linjärisering.

Linjärisera därför följande system

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + a \cos x_2 + 2x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_2 + u \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

Runt den stationära punkt där styrsignalen $u_0 = 1$. (2 p)

Solution

- a. Vi beräknar styrbarhetsmatrisen

$$W_s = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

som uppenbarligen har full rang (två linjärt oberoende kolonner/rader).

Systemet är alltså styrbart.

- b. Vi observerar att båda polplaceringar ger polerna beloppet $\omega_0 = 5$. Därför förväntar vi oss att de ger lika snabba stegsvar. Två av stegsvaren A, C är lika snabba (stigtid ca 0.5 sekunder). Vi kan därför förkasta B.

Med reella poler förväntar vi oss ett stegsvar utan översläng (om nollställen finns kan översläng fås ändå, men i detta fall finns inga nollställen). Med komplexa poler med en inte alltför låg relativ dämpning, såsom i polplacering 1, förväntar vi oss en markant översläng, men inte alltför stora oscillationer.

Därför: **Polplacering 1 – C, Polplacering 2 – A.**

- c. Detta är en standarduppgift så lösningen utelämnas.

Rätt svar: **Polplacering 1:** $K_1 = [8.5 \ 4.5]$, $k_r = 12.5$, **Polplacering 2:** $K_2 = [4.5 \ 8.5]$, $k_r = 12.5$.

- d. Om systemet är *observerbart* är det möjligt att skatta tillståndsvektorn utifrån y och u . Se kurskompendiet. Vi söker alltså ett svar på om systemet är observerbart. Vi beräknar observerbarhetsmatrisen

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},$$

som uppenbarligen har full rang (två linjärt oberoende kolonner/rader).

Systemet är alltså observerbart, och svaret på frågan är ja.

- e. Detta är en standarduppgift så lösningen utelämnas.

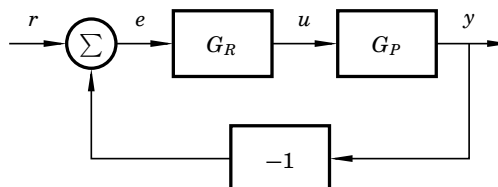
Rätt svar: Stationär punkt: $x_{1,0} = 0$, $x_{2,0} = \pi/2$, $u_0 = 1$.

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 + \pi & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u \\ \Delta y &= [1 \ 0] \Delta x \end{aligned}.$$

5. Denna uppgift handlar om ett andra ordningens system givet av

$$Y(s) = \frac{1}{\underbrace{s^2 + 5s + 2}_{G_P(s)}} U(s),$$

som vi kommer att återkoppla med en regulator enligt figur 6.



Figur 6: Reglerkrets med enkel återkoppling.

Tips! Glöm ej att säkerställa att förutsättningarna är uppfyllda för eventuella matematiska samband du använder dig av i denna uppgift!

- Betrakta först det öppna systemet. Låt styrsignalen $u(t) = 2\sin(t)$ och bestäm $y(t)$ då denna styrsignal legat på en lång tid. (1.5 p)
- Systemet återkopplas först med P-regulatorn $G_R(s) = K$. Bestäm överföringsfunktionerna (i) från referenssignal r till reglerfel e , och (ii) från referenssignal r till mätsignal y . (1 p)
- Låt fortsatt $G_R(s) = K$. Bestäm det stationära felet $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ vid ett enhetssteg i referenssignalen r . Uttryck felet i termer av K . (1 p)
- Då K ökas minskar det stationära felet, och systemets svar blir dessutom snabbare. Varför kan det trots det vara olämpligt att välja ett mycket stort K för vårt system? Ge (minst) ett argument. (1 p)
- För att eliminera felet provar vi istället en PI-regulator på formen

$$G_R(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right). \quad (2)$$

Låt $K = 1$. För vilka värden på T_i är det slutna systemet asymptotiskt stabilt? (1.5 p)

Solution

- Det gäller att $Y(s) = \frac{1}{\underbrace{s^2 + 5s + 2}_{G_P(s)}} U(s)$. Vi noterar att $G_P(s)$ har alla poler

i vänster halvplan då polpolynomet är av andra ordningen och med positiva koefficienter (se formelsamling). Alltså är $G_P(s)$ asymptotiskt stabilt och resultatet om frekvenssvar gäller. Det vill säga att om $u(t) = A\sin(\omega t)$ så är, efter lång tid, $y(t) = A|G_P(i\omega)|\sin(\omega t + \phi)$, där $\phi = \arg(G(i\omega))$.

Här är $u(t) = 2\sin(t)$ så vi beräknar

$$|G_P(i)| = \left| \frac{1}{i^2 + 5i + 2} \right| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \approx 0.20$$

och

$$\arg(G(i)) = -\arg(1 + 5i) = -\arctan(5) \approx -1.37.$$

Svar

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{26}} \sin(t - 1.37)$$

efter lång tid.

För full poäng bör man inse att stabilitet är ett villkor för frekvenssvaret, givet ledtråden. Man ska inte heller göra slarv, t.ex. glömma amplituden 2 på insignalen.

- b. Med hjälp av standardmetoder fås

$$G_{r \rightarrow y}(s) = G_{CL}(s) = \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)}$$

och

$$G_{r \rightarrow e}(s) = S(s) = \frac{1}{1 + G_P(s)G_R(s)}.$$

Insättning ger

$$G_{CL}(s) = \frac{K}{s^2 + 5s + 2 + K}$$

och

$$S(s) = \frac{s^2 + 5s + 2}{s^2 + 5s + 2 + K}.$$

- c. Det gäller att $E(s) = S(s)R(s)$. Vi noterar att $S(s)$ har alla poler i vänster halvplan om $K > -2$, då polpolynomet är av andra ordningen och i så fall har positiva koefficienter (se formelsamling). Därför existerar gränsvärdet $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ och vi kan använda slutvärdessatsen för att beräkna det.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{1}{s} = \frac{2}{2 + K}.$$

För full poäng bör man inse att stabilitet är ett villkor för gränsvärdets existens och kontrollera detta.

- d. Ett stort K innebär en stor förstärkning. Styrsignalen $u(t) = Ke(t)$ behöver då bli väldigt stor om det föreligger ett reglerfel $e(t)$. Det är inte säkert att en så stor styrsignal kan ställas ut av ställdonen – styrsignalen blir mättad. Som vi sett i labbar och simuleringar innebär det en försämrad prestanda om styrsignalen mätsas, jämfört med att välja ett lämpligt K från början.

Ett lämpligt argument är alltså: **Regulatorn kan inte ställa ut så stora styrsignaler – u mätsas.**

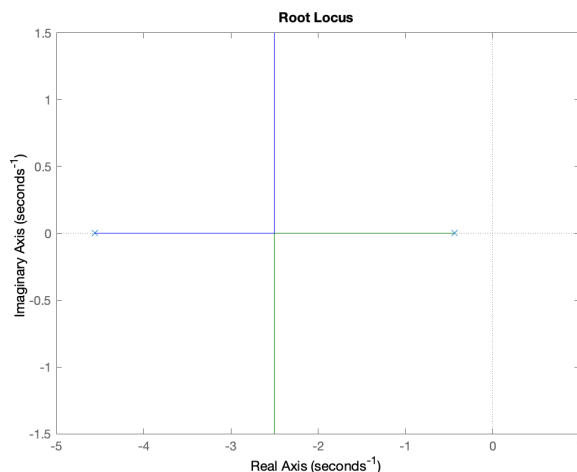
Ett annat problem är att systemet blir störningskänsligt. Med ett stort K förstärks mätbrus. Mätbrus kan innebära att regulatorn (felaktigt) tror att det föreligger ett reglerfel som den försöker kompensera för. Här bör man lågpassfiltrera.

Ett annat argument är alltså: **En för hög förstärkning gör systemet störningskänsligt.**

Slutligen ett argument som kräver lite mer analys: ett stort K kommer att driva ut systemets poler allt längre ut i det komplexa talplanet. Se rotort nedan. Det

gör systemets svar alltmer oscillativt, med stora överslängar, vilket normalt sett ej är önskvärt.

Ett tredje argument är alltså: **En hög förstärkning ger polerna stor imaginärdel och systemet oscillativt.**



e. Det slutna systemets överföringsfunktion ges av

$$G_{CL}(s) = \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)} = \frac{K(T_i s + 1)}{T_i(s^2 + 5s + 2) + KT_i s + K}$$

$$= \frac{K(T_i s + 1)}{T_i s^3 + 5T_i s^2 + (2 + K)T_i s + K}.$$

Polerna fås ur ekvationen $T_i s^3 + 5T_i s^2 + (2 + K)T_i s + K = 0 \iff s^3 + 5s^2 + (2 + K)s + K/T_i = 0$. Enligt resultat i formelsamlingen krävs för att $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$ ska ha rötter i VHP att $a_1, a_2, a_3 > 0$ och $a_1 a_2 > a_3$. Detta är tillräckliga och nödvändiga villkor. Alltså behöver vi att $5(2 + K) > K/T_i$. Instättning av $K = 1$ och omformning ger

$$T_i > \frac{1}{15}.$$

Att villkoret ger en nedre gräns för T_i är rimligt eftersom integraldelen har förstärkningen $1/T_i$, dvs, ett litet T_i ger större förstärkning.

För fler eller mer utvecklade argument hänvisas till föreläsningssanteckningarna.



Figur 7: European Robotic Arm, som sedan 2021 finns på ISS, och som i denna tentamen modelleras med $G_P(s)$ i uppgift 6. Bild från European Space Agency.

6. På rymdstationen ISS finns en lång robotarm som används för att serva solpanelerna. För att spara vikt är den mycket tunn. Det får som konsekvens att armen har en tendens att svänga mycket om man rör den hastigt. Överföringsfunktionen från motorn som styr armen till positionen hos spetsen på armen ges av:

$$G_P(s) = \frac{32 - s}{s^2 + 2s + 4}.$$

Bodediagrammet för $G_P(s)$ visas i figur 8. Man önskar använda återkoppling från positionen enligt figur 6 och designa en regulator för att styra armen.

Man provar först en P-regulator $G_R(s) = K$ med $K = 1$. Det slutna systemet är stabilt, men har för dålig prestanda. Dess stegsvar syns i figur 10.

- a. För att förbättra prestandan tas en fasavancerande länk fram enligt:

$$G_K^1(s) = 0.58 \frac{1 + s/3.46}{1 + s/(3 \cdot 3.46)}$$

- i. I figur 9 finns tre Bodediagram A-C. Vilket av dem motsvarar det öppna systemet $G_0(s) = G_K^1(s)G_P(s)$?

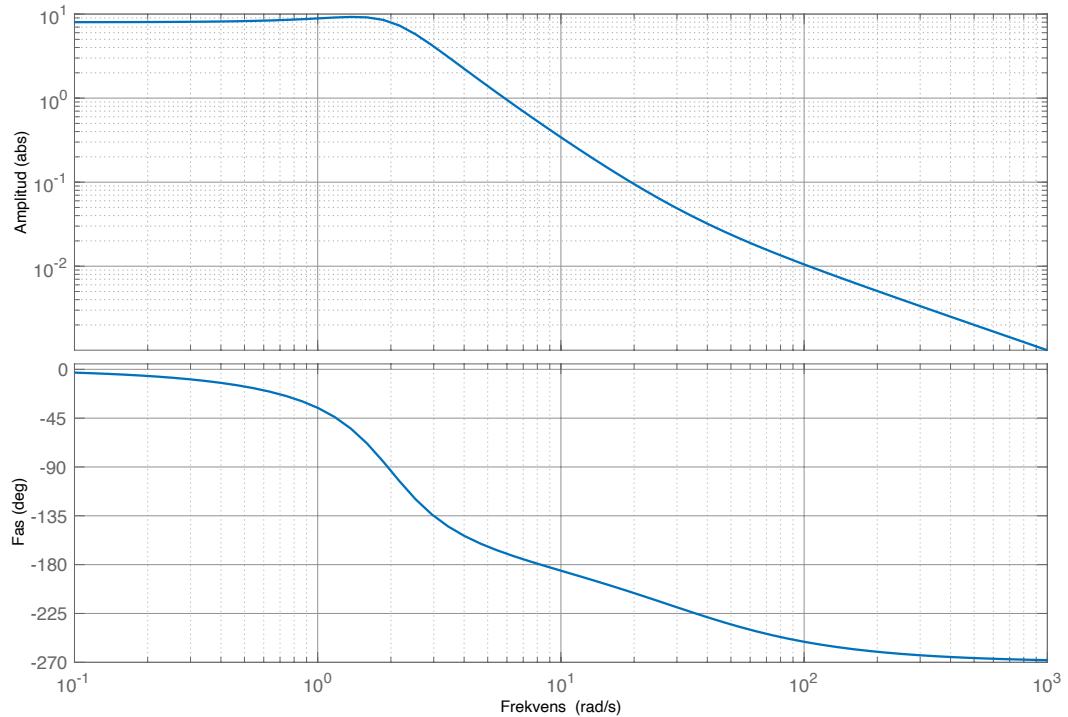
Ledning: Identifiera koefficienterna K_K , b och N i länken och ta hjälp av formelsamlingen.

- ii. I figur 10 finns tre stegsvar 1-3. Vilket av dem motsvarar det slutna systemet med regulatorn $G_R(s) = G_K^1(s)$?

Motivera dina svar noga. (2 p)

- b. Det är mycket viktigt att kunna följa referensändringar för armen med stor noggrannhet. Det stationära fel som kvarstår med regulatorn $G_R(s) = G_K^1(s)$ är därför inte acceptabelt.

Föreslå en länk $G_K^2(s)$ så att regulatorn $G_R(s) = G_K^1(s)G_K^2(s)$ eliminerar det stationära felet helt. Säkerställ att det slutna systemet förblir asymptotiskt stabilt. (2 p)



Figur 8: Bodediagram för processen $G_P(s) = \frac{32-s}{s^2+2s+4}$ i uppgift 6.

Solution

- a. Denna fasavancerande länk togs fram i tentan 2023-03-16 uppgift 6. Se facit där för härledning av länken.

i. Vi identifierar $b = 3.46$, $N = 3$, $K_K = 0.58$. Länken ökar fasen ca 30° (eftersom $N = 3$, se diagram i formelsamling) vid frekvensen $\omega = 3.46\sqrt{3} \approx 6$ rad/s. Länkens förstärkning vid denna frekvens är $K_K\sqrt{N} \approx 1.0$.

Notera att skärfrekvensen för $G_P(s)$ är just 6 rad/s. Vi förväntar oss därför att $G_0(s) = G_P(s)G_K^1(s)$ ska ha samma skärfrekvens (eftersom länkens förstärkning är 1). Vi kan alltså eliminera Bodediagram B som har en annan skärfrekvens.

Bodediagram C har en fas vid $\omega = 6$ rad/s som är *lägre* än G_P . Vi kan alltså eliminera Bodediagram C.

Kvar finns A, som har precis de egenskaper vi förväntar oss: samma skärfrekvens, en "bula" på fasen vid skärfrekvensen, motsvarande ca 30° , och en förstärkning vid låga frekvenser som är lägre än G_P .

Svar: Bodediagram A.

ii. Syftet med den fasavancerande länken är att öka systemets fasmarginal och därmed göra systemet mer dämpat, jämfört med en enkel P-regulator. Med länken har vi nu en fasmarginal på ca 40° (se Bodediagram A), vilket innebär viss översläng, men inga större oscillationer (en fasmarginal på $50-60^\circ$ rekommenderas vanligen för bra prestanda). Vi kan alltså utesluta stegsvar 1, som är *mer* oscillativt än med P-regulatorn.

Stegsvar 2 och 3 skiljer sig åt i att det stationära felet är nära noll i 3, men märkbart (och större än med P-regulatorn) i 2. Den fasavancerande länken

minskar inte stationära fel på egen hand – tvärtom är lågfrekvensförstärkningen hos länken bara 0.58, jämfört med 1 hos P-regulatorn. Vi kan därför utesluta stegsvar 3.

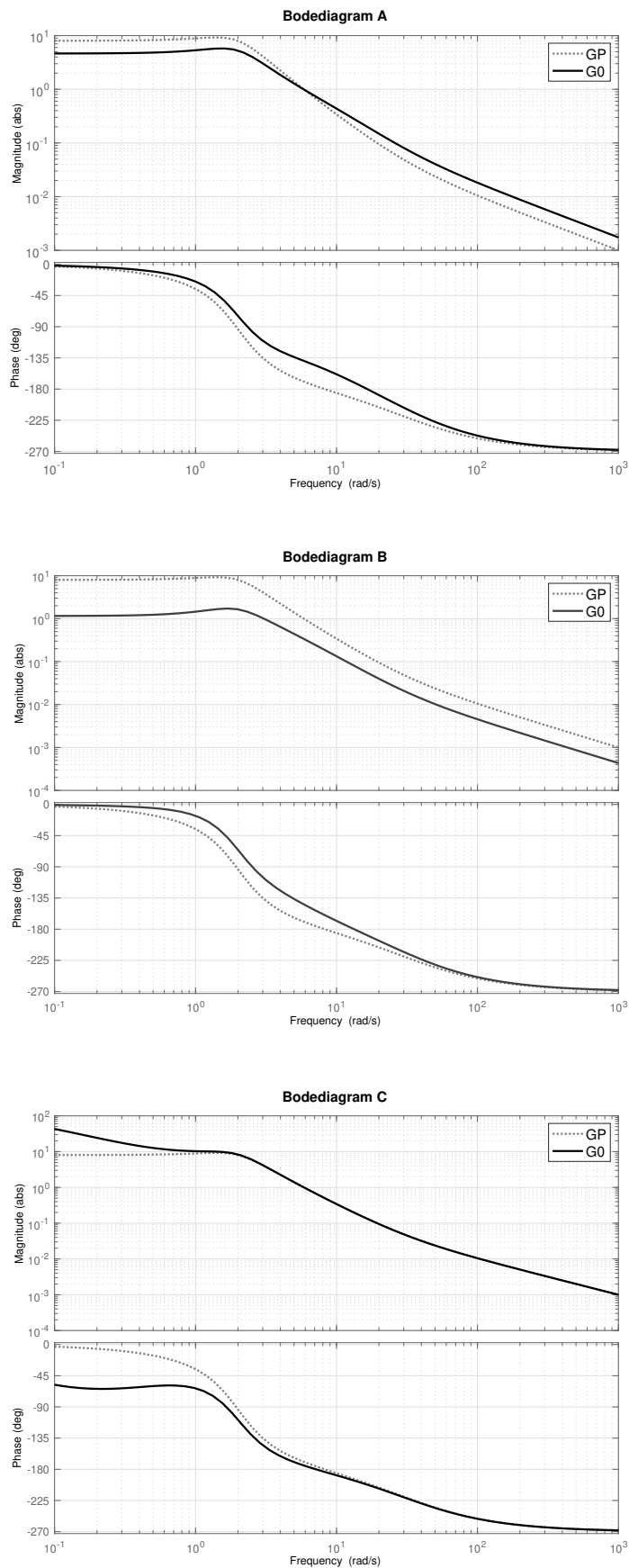
Svar: Stegsvär 2.

För information: Stegsvär 1 motsvarar den fasretarderande länken från tentan 2023-03-16 uppgift 6. Stegsvär 3 är kombinationen av den och en fasavancerande länk.

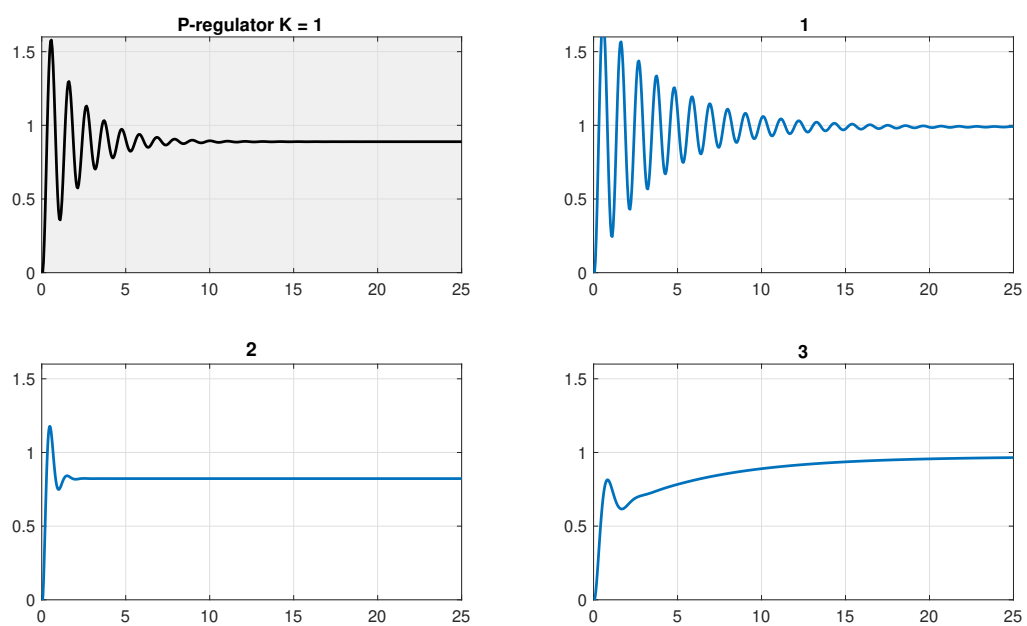
- b. Denna uppgift kan lösas på flera sätt. Oavsett behöver en integrator införas. Enklast är att använda en fasretarderande länk med $M = \infty$, eftersom felet vid ett enhetssteg helt ska elimineras. Vi väljer då $G_K^2(s) = \frac{s+a}{s}$, med $a = 0.1\omega_c = 0.6$. Detta garanterar att fasmarginalen minskar som mest 6° , och eftersom den befintliga fasmarginalen är ca 40° enligt Bodediagram A förblir det slutna systemet stabilt.

Svar: $G_K^2(s) = \frac{s+0.6}{s}$.

Man kan också testa till exempel $G_K^2 = 1 + \frac{1}{s}$ och beräkna $G_{CL} = \frac{G_P G_R}{1+G_P G_R}$ med $G_R = G_K^2$. Detta ger $G_{CL} = \frac{-s^2+31s+32}{s^3+s^2+35s+32}$. Dess poler ligger i VHP enligt kriterierna i formelsamlingen (verifiera!). Den fasavanverande länken G_K^1 kan inte försämra det slutna systemets stabilitetsegenskaper (den ökar ju fasmarginalen!) och därmed är det slutna systemet stabilt då det återkopplas med $G_R(s) = G_K^1(s)G_K^2(s)$.



Figur 9: Bodediagram för tre olika öppna system $G_0(s) = G_P(s)G_R(s)$. Bodediagrammet för $G_P(s)$ är också inritat för att underlätta jämförelsen. Något av Bodediagrammen A,B,C hör till kompenseringslänken $G_K^1(s)$ i 6-a.



Figur 10: Stegsvär för robotarmen i uppgift 6 med regulatorn $G_R(s) = 1$ i övre vänstra hörnet. Något av stegsvaren 1,2,3 hör till kompenseringslänken $G_K^1(s)$ i 6-a.